SL第50回　　SL-50-MBD(1)_8.6_8章二つの物体間の拘束式 5

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

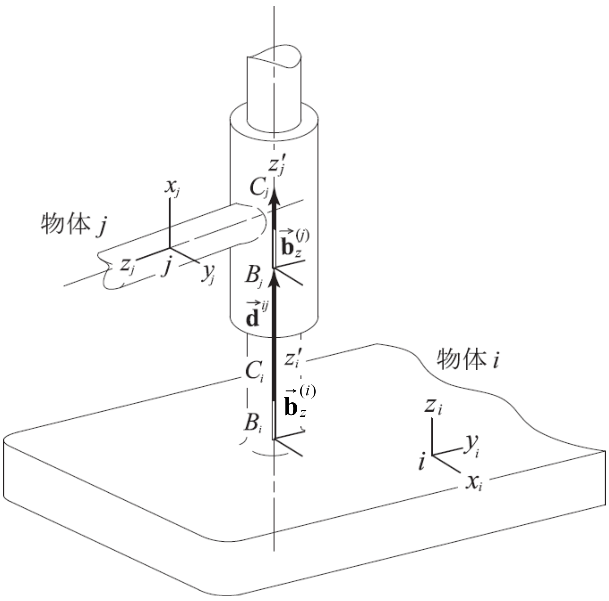
今回はSL(short lecture)通算第50回目。8章の仮想変位、仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその六回目として二つの物体間の拘束式のうち、円柱ジョイント、並進ジョイント、ねじジョイントについて学ぶ。
2025.02.27　清水

8.3.2 円柱ジョイント、並進ジョイント、ねじジョイント

円柱ジョイント、並進ジョイント、ねじジョイントについて説明する。なお、ここの部分はコロナ社の「マルチボディダイナミクス(1)」の本のp.240の付録8.3.2を参考にしている。

(a) 円柱ジョイント

付図8.1に円柱ジョイントを示す。

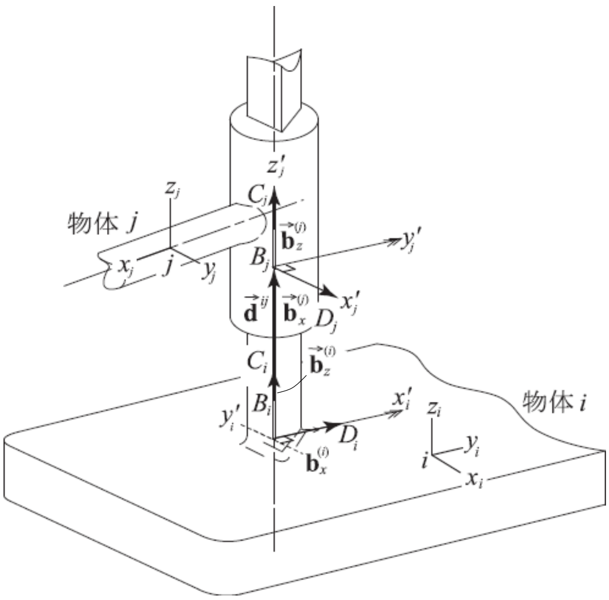


付図8.1　円柱ジョイント

円柱ジョイントの拘束条件は$\overrightarrow{B_iB_j}=\vec{\mathbf{d}}^{ij}$とすると$\vec{\mathbf{b}}_z^{(i)}$と$\vec{\mathbf{b}}_z^{(j)}$が平行であり、かつ$\vec{\mathbf{b}}_z^{(i)}$と$\vec{\mathbf{d}}^{ij}$が平行であることより付表8.1の式(付8.1)と(付8.2)となる。拘束式は四つであり、軸回りの回転と軸方向の並進の二つの自由度が許されている。拘束式の変分は付表8.1に述べられているとおり、ベクトルを対応するベクトルに読み直して、式(8.15)と(8.17)により与えられる。

(b) 並進ジョイント

付図8.2に並進ジョイントを示す。

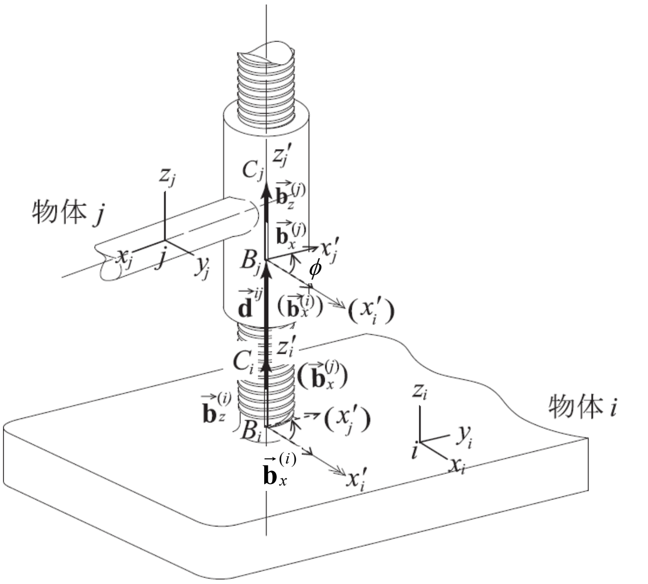


付図8.2　並進ジョイント

これは円柱ジョイントに似ているが、共通軸の回りの回転が許されていない。並進ジョイントの拘束式は付表8.1の式(付8.3)、(付8.4)、(付8.5)となる。並進ジョイントの拘束式は5つであり、二つの物体の間の共通軸方向への並進運動のみが許されている。拘束式の変分は付表8.1に述べられている。

(c) ねじジョイント

付図8.3にねじジョイントを示す。



付図8.3　ねじジョイント

ねじジョイントの拘束式の四つは円柱ジョイントのそれらと同一で、付表8.1の式(付8.6) 、(付8.7)となる。

ねじジョイントの拘束式にはもう一つの拘束式が必要である。ねじのピッチレート(単位回転角当たりの進み量)を α 、物体 $\boldsymbol{i}$ に対する物体 j の相対回転角を ϕ (反時計回りを正)、ねじの進み量は初期には点 B_i と B_j が一致していたとすると $\mathbf{b}_z^{iT}\mathbf{d}^{ij} \equiv C^{(n2)}(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{d}^{ij}) \quad = \alpha(\phi-\phi_0)$ となる[ねじは任意 n 回転するので、この時は $\alpha(\phi+2n\pi-\phi_0)$ となる。式(付8.8)参照]。ここで ϕ_0 は初期の $\vec{\mathbf{b}}_x^i$ と $\vec{\mathbf{b}}_x^j$ のなす角であり、 $\phi-\phi_0$ は相対回転量である。 ϕ が新たな人為的な座標変数であるから、ねじ $\boldsymbol{i}$ が物体 j に対して ϕ だけ回転した時の内積の関係式より付表8.1の式(付8.9)となる。拘束式(付8.8)の変分は式(8.13)と式(7.38)を用いて

$$
\begin{aligned}
\delta C^{(sc)} &= \delta C^{(n2)}\left(\mathbf{b}_z^i, \mathbf{d}^{ij}\right) - \alpha\delta\phi \\
&= \mathbf{b}_z'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T(\delta\mathbf{r}^j - \mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{s}}_j'^B\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} - \delta\mathbf{r}^i + \mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{s}}_i'^B\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}) \\
&\quad - \mathbf{d}^{ijT}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{b}}_z'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi} - \alpha\mathbf{b}_z'^{iT}(\mathbf{A}^{ij}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} - \boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi})
\end{aligned}
$$

となるから、最終的に付8.1の式(付8.10)となる。ただし $\mathbf{A}^{ij} = (\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}$ である。

付表8.1　円柱ジョイント、並進ジョイント、ねじジョイント

拘束のタイプ	拘束式とその仮想変位	式番号
(a)円柱ジョイント	$\mathbf{C}^{(p1)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{b}_z^j\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{b}}_z^i\mathbf{b}_z^j=\mathbf{0}$	(付8.1)
	$\mathbf{C}^{(p2)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{d}^{ij}\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{b}}_z^i\mathbf{d}^{ij}=\mathbf{0}$	(付8.2)
	拘束式の変分は式(8.15)、(8.17)より求められる。	
(b)並進ジョイント	$\mathbf{C}^{(p1)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{b}_z^j\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{b}}_z^i\mathbf{b}_z^j=\mathbf{0}$	(付8.3)
	$\mathbf{C}^{(p2)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{d}^{ij}\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{b}}_z^i\mathbf{d}^{ij}=\mathbf{0}$	(付8.4)
	$\mathbf{C}^{(n1)}\left(\mathbf{b}_x^i,\mathbf{b}_x^j\right)\overset{(1)}{\equiv}\mathbf{b}_x^{iT}\mathbf{b}_x^j=0$	(付8.5)
	拘束式の変分は式(8.15)、(8.17)、(8.11)により与えられる。ただし対応するベクトルを用いる。	
(c)ねじジョイント	$\mathbf{C}^{(p1)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{b}_z^j\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{b}}_z^i\mathbf{b}_z^j=\mathbf{0}$	(付8.6)
	$\mathbf{C}^{(p2)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{d}^{ij}\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{b}}_z^i\mathbf{d}^{ij}=\mathbf{0}$	(付8.7)
	$C^{(sc)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{d}^{ij},\alpha,\phi_0\right)\overset{(1)}{\equiv}C^{(n2)}\left(\mathbf{b}_z^i,\mathbf{d}^{ij}\right)-\alpha(\phi-\phi_0)=0$	(付8.8)
	$C^{(\phi)}\left(\mathbf{b}_x^i,\mathbf{b}_x^j\right)\overset{(1)}{\equiv}\mathbf{b}_x^{iT}\mathbf{b}_x^j-\cos\phi=0$	(付8.9)
	拘束式(付8.8)の変分は	
	$\begin{aligned}\delta C^{(sc)}&=\mathbf{b}_z'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T\delta\mathbf{r}^j-\mathbf{b}_z'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T\delta\mathbf{r}^i\\&\quad-\mathbf{b}_z'^{iT}\mathbf{A}^{ij}(\tilde{\mathbf{s}}_j'^B+\alpha\mathbf{I}_3)\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}\\&\quad+\left\{\mathbf{b}_z'^{iT}(\tilde{\mathbf{s}}_i'^B+\alpha\mathbf{I}_3)-\mathbf{d}^{ijT}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{b}}_z'^i\right\}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=0\end{aligned}$	(付8.10)

［補足説明］　自己完結のため、この節で使用されている式を補足しておく。

式(7.38)；

$$\begin{aligned}\delta\phi&=\mathbf{e}_z^{iT}(\boldsymbol{\delta\theta}^{Oj}-\boldsymbol{\delta\theta}^{Oi})=(\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{e}_z'^i)^T(\mathbf{A}^{Oj}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\mathbf{A}^{Oi}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi})\\&=\mathbf{e}_z'^{iT}\left\{(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi})\right\}\\&=\mathbf{e}_z'^{iT}(\mathbf{A}^{ij}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi})\end{aligned}\tag{7.38}$$

式(8.11)；

$$\begin{aligned}\delta C^{(n1)}\left(\mathbf{a}^i,\mathbf{a}^j\right)&=\mathbf{a}^{iT}\delta\mathbf{a}^j+\mathbf{a}^{jT}\delta\mathbf{a}^i\\&\underset{(8.10)}{=}-\left\{\mathbf{a}'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^j\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}+\mathbf{a}'^{jT}(\mathbf{A}^{Oj})^T\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}\right\}=0\end{aligned}\tag{8.11}$$

式(8.13)；

$$
\begin{aligned}
\delta C^{(n2)}\left(\mathbf{a}^{i},\mathbf{d}^{ij}\right) &= \mathbf{a}^{iT}\delta\mathbf{d}^{ij}+\mathbf{d}^{ijT}\delta\mathbf{a}^{i} \\
&\underset{(7.16)}{\equiv} \mathbf{a}'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^{T}\left(\delta\mathbf{r}^{j}-\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{s}}_{j}'^{B}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\delta\mathbf{r}^{i}+\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{s}}_{i}'^{B}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}\right)-\mathbf{d}^{ijT}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^{i}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=0
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

式(8.15)；

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{C}^{(p1)}\left(\mathbf{a}^{i},\mathbf{a}^{j}\right) &= \tilde{\mathbf{a}}^{i}\delta\mathbf{a}^{j}-\tilde{\mathbf{a}}^{j}\delta\mathbf{a}^{i}\underset{(8.10)}{=}-\tilde{\mathbf{a}}^{i}\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^{j}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}+\tilde{\mathbf{a}}^{j}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^{i}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi} \\
&\underset{(4.20)}{=}-\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^{i}(\mathbf{A}^{Oi})^{T}\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^{j}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}+\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^{j}(\mathbf{A}^{Oj})^{T}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^{i}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=\mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

式(8.17)；

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{C}^{(p2)}\left(\mathbf{a}^{i},\mathbf{d}^{ij}\right) &= \tilde{\mathbf{a}}^{i}\delta\mathbf{d}^{ij}-\tilde{\mathbf{d}}^{ij}\delta\mathbf{a}^{i} \\
&= \mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^{i}(\mathbf{A}^{Oi})^{T}\left(\delta\mathbf{r}^{j}-\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{s}}_{j}'^{B}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\delta\mathbf{r}^{i}+\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{s}}_{i}'^{B}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}\right)+\tilde{\mathbf{d}}^{ij}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^{i}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=\mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$