SL第46回　　SL-46-MBD(1)_8.2_8章二つのベクトル間の拘束

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第46回目。8章の剛体系の拘束方程式の内容を十五回にわたって講義している。今回はその二回目として二つのベクトル間の拘束について学ぶ。　2024.03.28　清水

8.2　二つのベクトルの間の拘束

まず、二つのベクトルの間の拘束を調べる。これらはよく幾何拘束の条件に現れる。

図8.2は全体枠$O-xyz$と、この枠内の物体iとjである。物体iとj上にそれぞれ基準枠iとjを設定する。さらにこの物体に固定された点B_iとB_jを考える。

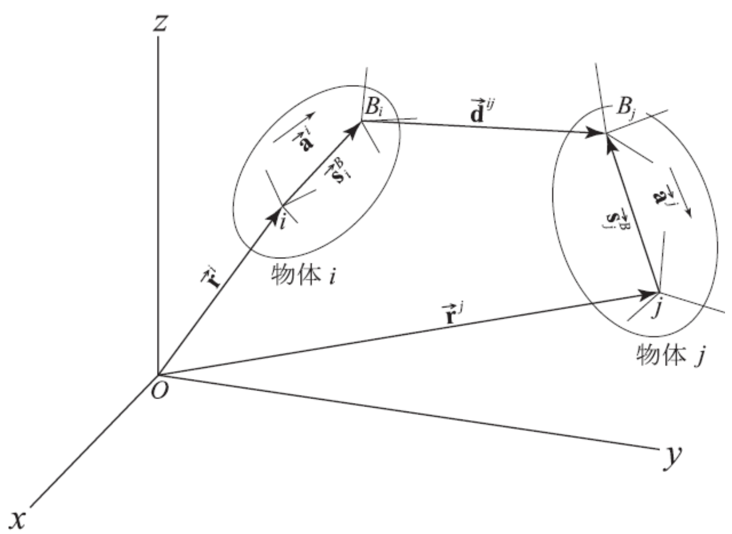

図8.2　物体内のベクトルと物体間のベクトル

B_iは物体iに、B_jは物体jに固定されているとする。点B_iからB_jに向く点間ベクトル$\vec{\mathbf{d}}^{ij}$は

$$\vec{\mathbf{d}}^{ij} = \vec{\mathbf{r}}^j + \vec{\mathbf{s}}_j^B - \left(\vec{\mathbf{r}}^i + \vec{\mathbf{s}}_i^B\right) \tag{8.7}$$

と書ける。これを枠Oと枠i, jの成分で表示すると

$$\mathbf{d}^{ij} = \mathbf{r}^j + \mathbf{A}^{Oj}\mathbf{s}_j'^B - \mathbf{r}^i - \mathbf{A}^{Oi}\mathbf{s}_i'^B \tag{8. 8}$$

となる。ただし$\mathbf{A}^{Oi}, \mathbf{A}^{Oj}$はそれぞれ枠$i$から枠$O$へ、枠$j$から枠$O$への座標変換マトリックス、$\mathbf{s}_i'^B, \mathbf{s}_j'^B$はそれぞれ$\vec{\mathbf{s}}_i^B, \vec{\mathbf{s}}_j^B$の枠$i$, jの既知成分である。

つぎに物体i、j上の点B_i、B_jにこれらの点を原点とする枠B_i、B_jをとる。枠Oのベクトリックス$\mathbf{e}^{(O)} = [\vec{\mathbf{e}}_x^{(O)} \quad \vec{\mathbf{e}}_y^{(O)} \quad \vec{\mathbf{e}}_z^{(O)}]^T$、枠$i$、$j$のベクトリックス$\mathbf{e}^{(i)} = [\vec{\mathbf{e}}_x^{(i)} \quad \vec{\mathbf{e}}_y^{(i)} \quad \vec{\mathbf{e}}_z^{(i)}]^T$、$\mathbf{e}^{(j)} = [\vec{\mathbf{e}}_x^{(j)} \quad \vec{\mathbf{e}}_y^{(j)} \quad \vec{\mathbf{e}}_z^{(j)}]^T$に加えて、枠$B_i$、枠$B_j$のベクトリックスを$\mathbf{b}^{(i)} = [\vec{\mathbf{b}}_x^{(i)} \quad \vec{\mathbf{b}}_y^{(i)} \quad \vec{\mathbf{b}}_z^{(i)}]^T$、$\mathbf{b}^{(j)} = [\vec{\mathbf{b}}_x^{(j)} \quad \vec{\mathbf{b}}_y^{(j)} \quad \vec{\mathbf{b}}_z^{(j)}]^T$と書く。

8. 2. 1　二つのベクトルの垂直の条件・その1（$n1$タイプ）

図8. 2に示す二つの物体i、jにうめ込まれた大きさが一定の二つのベクトル$\vec{\mathbf{a}}^i = \mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{a}^i = \mathbf{e}^{(i)T}\mathbf{a}'^i$と$\vec{\mathbf{a}}^j = \mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{a}^j = \mathbf{e}^{(j)T}\mathbf{a}'^j$が垂直であるための条件は

$$C^{(n1)}\left(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j\right) \overset{(1)}{\equiv} \mathbf{a}^{iT}\mathbf{a}^j = \mathbf{a}'^{iT}\left(\mathbf{A}^{Oi}\right)^T \mathbf{A}^{Oj}\mathbf{a}'^j = \mathbf{a}'^{iT}\mathbf{A}^{ij}\mathbf{a}'^j = 0 \tag{8. 9}$$

である。ここで$\equiv$の上の( )内の数値は拘束式の数を示している。$\mathbf{A}^{ij}$は枠jから枠iへの座標変換マトリックス$\mathbf{A}^{ij} = (\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}$ [式(6. 29)参照]である。拘束式(8. 9)の仮想変位(微小な変分)は$\mathbf{a}^i = \mathbf{A}^{Oi}\mathbf{a}'^i$, $\mathbf{a}^j = \mathbf{A}^{Oj}\mathbf{a}'^j$および

$$\delta\mathbf{a}^i = \delta\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{a}'^i \underset{(7.16)}{=} -\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}, \qquad \delta\mathbf{a}^j = \delta\mathbf{A}^{Oj}\mathbf{a}'^j \underset{(7.16)}{=} -\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^j\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} \tag{8. 10}$$

を用いて次式となる。

$$\begin{aligned}\delta C^{(n1)}\left(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j\right) &= \mathbf{a}^{iT}\delta\mathbf{a}^j + \mathbf{a}^{jT}\delta\mathbf{a}^i \\ &\underset{(8.10)}{=} -\left\{\mathbf{a}'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^j\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} + \mathbf{a}'^{jT}(\mathbf{A}^{Oj})^T\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}\right\} = 0\end{aligned} \tag{8. 11}$$

8. 2. 2　二つのベクトルの垂直の条件・その2（$n2$タイプ）

図8. 2に示す物体iに埋め込まれた大きさが一定のベクトル$\vec{\mathbf{a}}^i$と、大きさが変化する点間ベクトル$\vec{\mathbf{d}}^{ij}$が垂直であるための条件は次式となる。

$$C^{(n2)}\left(\mathbf{a}^i, \mathbf{d}^{ij}\right) \overset{(1)}{\equiv} \mathbf{a}^{iT}\mathbf{d}^{ij} \underset{(8.8)}{=} \mathbf{a}'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T\left(\mathbf{r}^j + \mathbf{A}^{Oj}\mathbf{s}_j'^B - \mathbf{r}^i - \mathbf{A}^{Oi}\mathbf{s}_i'^B\right) = 0 \tag{8. 12}$$

$\mathbf{d}^{ij}=\mathbf{0}$ のとき、この式は成り立たない。この拘束式の仮想変位は次式となる。

$$\delta C^{(n2)}\left(\mathbf{a}^i,\mathbf{d}^{ij}\right)=\mathbf{a}^{iT}\delta\mathbf{d}^{ij}+\mathbf{d}^{ijT}\delta\mathbf{a}^i$$
$$\underset{(7.16)}{\equiv}\mathbf{a}'^{iT}(\mathbf{A}^{Oi})^T\left(\delta\mathbf{r}^j-\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{s}}_j'^B\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\delta\mathbf{r}^i+\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{s}}_i'^B\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}\right)-\mathbf{d}^{ijT}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=0$$

(8. 13)

8. 2. 3　二つのベクトルの平行の条件・その1（ $p1$ タイプ）

図8. 2において、大きさが一定のベクトル $\vec{\mathbf{a}}^i$ と $\vec{\mathbf{a}}^j$ が平行であるためには、これらのベクトルの外積が $\mathbf{0}$ 、すなわち

$$\mathbf{C}^{(p1)}\left(\mathbf{a}^i,\mathbf{a}^j\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{a}}^i\mathbf{a}^j\underset{(4.20)}{=}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\mathbf{a}'^j=\mathbf{0} \qquad (8.\ 14)$$

でなければならない。式は三つ得られるが、独立な二つの式を使用する。拘束式(8. 14)の仮想変位は次式となる。

$$\delta\mathbf{C}^{(p1)}\left(\mathbf{a}^i,\mathbf{a}^j\right)=\tilde{\mathbf{a}}^i\delta\mathbf{a}^j-\tilde{\mathbf{a}}^j\delta\mathbf{a}^i\underset{(8.10)}{=}-\tilde{\mathbf{a}}^i\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^j\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}+\tilde{\mathbf{a}}^j\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}$$
$$\underset{(4.20)}{=}-\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^j\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}+\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{a}}'^j(\mathbf{A}^{Oj})^T\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=\mathbf{0}$$

(8. 15)

8. 2. 4　二つのベクトルの平行の条件・その2（ $p2$ タイプ）

図8. 2において、大きさが一定の $\vec{\mathbf{a}}^i$ と変化する $\vec{\mathbf{d}}^{ij}$ が平行であるためには

$$\mathbf{C}^{(p2)}\left(\mathbf{a}^i,\mathbf{d}^{ij}\right)\overset{(2)}{\equiv}\tilde{\mathbf{a}}^i\mathbf{d}^{ij}\underset{(4.20)}{=}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i(\mathbf{A}^{Oi})^T\left(\mathbf{r}^j+\mathbf{A}^{Oj}\mathbf{s}_j'^B-\mathbf{r}^i-\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{s}_i'^B\right)=\mathbf{0} \qquad (8.\ 16)$$

でなければならない。式(8. 16)の三つの式のうち独立な式は二つである。このとき $\mathbf{a}^i$ の三つの要素の絶対値 a_x^i,a_y^i,a_z^i を比較し、これらの中の最大値を方程式の項に含む二つの式を用いる[2)]。拘束式(8. 16)の仮想変位は次式となる。

$$\delta\mathbf{C}^{(p2)}\left(\mathbf{a}^i,\mathbf{d}^{ij}\right)=\tilde{\mathbf{a}}^i\delta\mathbf{d}^{ij}-\tilde{\mathbf{d}}^{ij}\delta\mathbf{a}^i$$
$$=\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i(\mathbf{A}^{Oi})^T\left(\delta\mathbf{r}^j-\mathbf{A}^{Oj}\tilde{\mathbf{s}}_j'^B\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}-\delta\mathbf{r}^i+\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{s}}_i'^B\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}\right)+\tilde{\mathbf{d}}^{ij}\mathbf{A}^{Oi}\tilde{\mathbf{a}}'^i\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}=\mathbf{0}$$

(8. 17)