SL第45回　　SL-45-MBD(1)_8.1_8章拘束式の種類と例

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第45回目。8章の剛体系の拘束方程式の内容を十五回にわたって講義している。今回はその一回目として拘束式の種類と例について学ぶ。　　2024.02.29　清水

8.　剛体系の拘束方程式

拘束式については3章で簡単に紹介し、ホロノミック拘束とノンホロノミック拘束のあることを述べた。幾何拘束または配位拘束と呼ばれる拘束はホロノミック拘束である。運動拘束と呼ばれ、速度式で表される拘束はシンプルノンホロノミック拘束である。ここではこれらの拘束式を扱う[1),2)]。

8.1 拘束式の種類と例

(1) 幾何拘束

3次元空間内の拘束されていない剛体の運動は、六つの独立な座標により記述される。三つは位置を、残りの三つは回転姿勢を表す。図8.1において全体基準枠Oから見た物体i上の点Bの位置は式(4.28)より

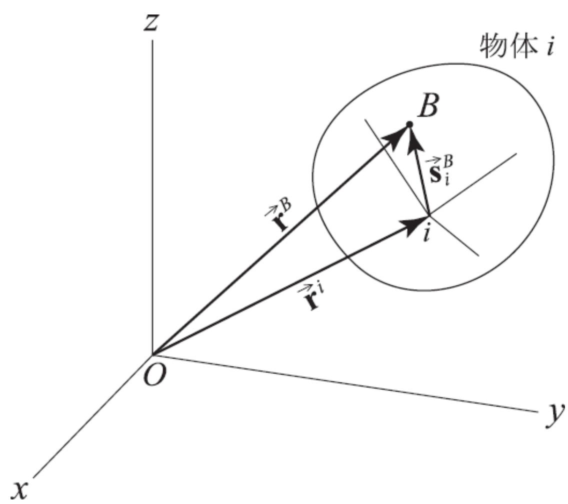

図8.1　物体i上の点Bの位置ベクトル

$$\mathbf{r}^B \underset{(4.28)}{=} \mathbf{r}^i + \mathbf{A}^{Oi}\mathbf{s}_i'^B \tag{8.1}$$

と表される。

ここで$\mathbf{r}^i$は、枠$\boldsymbol{i}$の原点の位置ベクトル$\vec{\mathbf{r}}^i$の全体枠による成分表示であり、$\mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} x^i & y^i & z^i \end{bmatrix}^T$と書ける。$\mathbf{s}_i'^B \left(= \mathbf{r}'^{iP}\right)$は物体$\boldsymbol{i}$上の点$B$のベクトル$\vec{\mathbf{r}}^{iP}$の枠$\boldsymbol{i}$による成分表示であり、既知成分で$\mathbf{s}_i'^B = \begin{bmatrix} s_{xi}'^B & s_{yi}'^B & s_{zi}'^B \end{bmatrix}^T$と書ける。$\mathbf{A}^{Oi}$は枠$\boldsymbol{i}$から枠$O$への座標変換マトリックスであり［式(4.2b)参照］([復習8.1_1])、三つの独立な変数によって表される。すなわちオイラー角$\boldsymbol{\theta}_E \equiv \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$を用いる場合には式(4.50)（[復習8.1_2]）により、オイラーパラメータ$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}^T$を用いる場合には式(6.5)（[復習8.1_3]）により表される。

マルチボディシステムでは多くの物体が相互に関係し合って運動する。n_b個の物体から構成される系のおのおのの物体の配位は、直交座標$\mathbf{r}^i$と姿勢座標（回転角$\boldsymbol{\theta}^i$またはオイラーパラメータ$\boldsymbol{\varepsilon}^i$）により表される。このとき一般化座標は$i = 1, 2, \cdots, n_b$として

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{1T} & \boldsymbol{\theta}^{1T} & \mathbf{r}^{2T} & \boldsymbol{\theta}^{2T} & \cdots & \mathbf{r}^{n_bT} & \boldsymbol{\theta}^{n_bT} \end{bmatrix}^T \quad \text{または} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{1T} & \boldsymbol{\varepsilon}^{1T} & \mathbf{r}^{2T} & \boldsymbol{\varepsilon}^{2T} & \cdots & \mathbf{r}^{n_bT} & \boldsymbol{\varepsilon}^{n_bT} \end{bmatrix}^T \tag{8.2}$$

と書ける。ここで物体$\boldsymbol{i}$の座標$\mathbf{q}^i$を

$$\mathbf{q}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{iT} & \boldsymbol{\theta}^{iT} \end{bmatrix}^T \quad \text{または} \quad \mathbf{q}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{iT} & \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} \end{bmatrix}^T \tag{8.3}$$

とおくと、一般化座標はこれを用いて

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{1T} & \mathbf{q}^{2T} & \cdots & \mathbf{q}^{n_bT} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T \tag{8.4}$$

となる。ここで一般化座標の数nは、オイラーの回転角を用いる場合には$n = 6n_b$、オイラーパラメータを用いる場合には$n = 7n_b$である。

後述のように、一般的な機械システムの幾何拘束や駆動拘束などの関係式は、代数方程式により次式のように書ける。

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \tag{8.5}$$

これは幾何拘束方程式または配位拘束方程式と呼ばれる。

8.2〜8.7節では標準的なペア(対偶)を考え、その拘束式を求める。

(2) 運動拘束

機械系の多くの問題は、速度形式の拘束方程式

$$\mathbf{D}(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv \mathbf{C}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_0(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \tag{8.6}$$

の形に表される。8.8節ではシンプルノンホロノミック拘束のいくつかの例を示す。

参考文献

1) E. J. Haug, Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems ,Volume l, Basic Methods, Ally and Bacon (1989), pp.350-382.

2) P. E. Nikravesh, Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice – Hall (1988), pp.186-200.

[復習8.1_1] 座標変換マトリックスについて

枠iから枠Oへの座標変換マトリックス$\mathbf{A}^{Oi}$を、第4章の式(4.2b)に基づいて簡単に復習してみよう。これは、SL-10で詳しく説明されている。説明の都合上、$\mathbf{A}^{Oi} \to \mathbf{A}^{BC} = \mathbf{A}$として扱う。つまり$O \to B,\ i \to C$とみなす。

図4.1は固定した全体枠Bと回転後の枠Cである。初期に枠Bに一致していた枠Cが回転変換を受けて現配置の枠Cになった。すると式(4.2b)の座標変換マトリックス$\mathbf{A}$は

$$\mathbf{A}(=\mathbf{A}^{BC}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] \tag{4.2b}$$

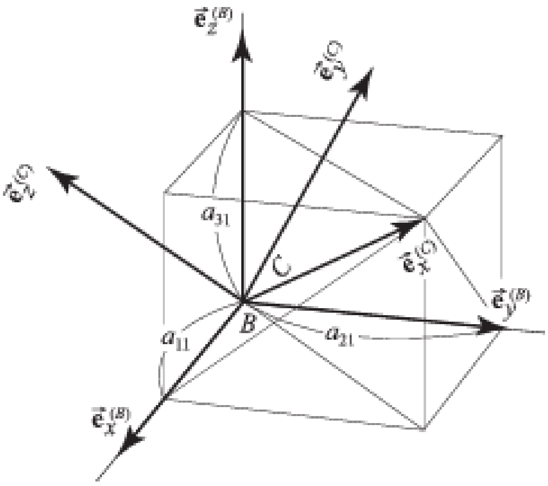

図4. 1　　二つの基底ベクトルの組$\mathbf{e}^{(B)}$と$\mathbf{e}^{(C)}$

である。これはまた

$$\mathbf{A}(=\mathbf{A}^{BC})=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix},\ \ \mathbf{a}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\end{bmatrix},\qquad j=1,2,3 \tag{4.2b)'}$$

とも書ける。$\mathbf{a}_j$は枠Bに対する、枠Cのj軸の方向余弦ベクトルである。すなわち、$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix}$は枠$C$の$x,y,z$軸の、枠$B$に対する方向余弦ベクトルである。式(4. 6a)より、図4. 1のベクトル成分$\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}$を用いて

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}\\ \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}\\ \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}\\ \vec{\mathbf{e}}_y^{(C)}\\ \vec{\mathbf{e}}_z^{(C)}\end{bmatrix} \tag{4.6a)'}$$

となる。したがって、例えばベクトル$\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}$の成分は枠Cの成分表示では

$$\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}=a_{11}\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}+a_{12}\vec{\mathbf{e}}_y^{(C)}+a_{13}\vec{\mathbf{e}}_z^{(C)}=a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_{13}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ a_{13}\end{bmatrix} \tag{4.6a)'$_1$}$$

となる。式(4.6a)'の逆変換より

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}\\ \vec{\mathbf{e}}_y^{(C)}\\ \vec{\mathbf{e}}_z^{(C)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}\\ \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}\\ \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}\\ \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}\\ \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}\end{bmatrix} \qquad (4.6a)''$$

したがって、例えばベクトル$\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}$の成分は枠Bの成分表示では

$$\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}=a_{11}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}+a_{21}\vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}+a_{31}\vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}=a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_{13}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1 \qquad (4.6a)''_1$$

となる。この$\mathbf{a}_1$は図4.1のベクトル$\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}$の枠Bでの成分表示と一致する。これが方向余弦ベクトル$\mathbf{a}_1$である。

[復習8.1_2]　　オイラー角による回転変換マトリックスの記述

図4. 6に示すようにx軸に1，y軸に2，z軸に3を対応させ、軸$3(\phi)\to 1(\theta)\to 3(\psi)$の順序で回転する。回転前が枠$\left\{O,\mathbf{e}^{(O)}\right\}$、回転後が枠$\left\{B,\mathbf{e}^{(B)}\right\}$としたときの回転変換マトリックス$\mathbf{A}(=\mathbf{A}^{OB})$、ここで$\mathbf{e}^{(O)}=\mathbf{A}^{OB}\mathbf{e}^{(B)}$、は式(4. 50)と書ける。

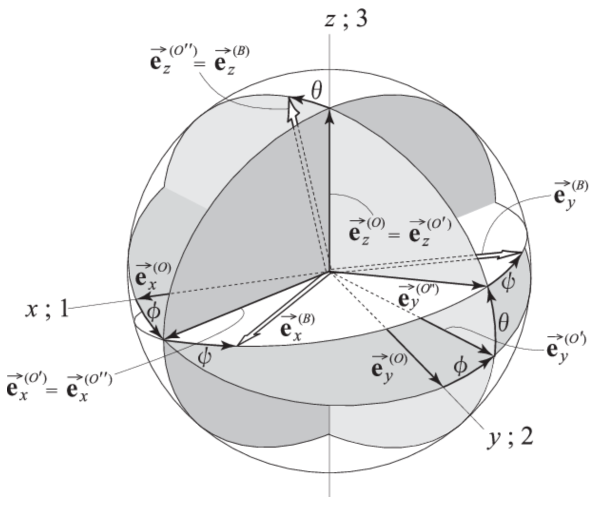

図4. 6　オイラー角ϕ，θ，ψ

$$
\mathbf{A}(=\mathbf{A}^{OB})=
$$

$$
=\begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi-\sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi+\cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.50}
$$

このϕ(歳差角; precession angle)、θ(章動角; nutation angle)、ψ(スピン角; spin angle)の三つの角をオイラー角と呼ぶ。オイラー角は列マトリックスでつぎのように定義しておくと便利である。

$$
\boldsymbol{\theta}_E \equiv [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \tag{4.51}
$$

[復習8.1_3]　オイラーパラメータによる回転変換マトリックスの記述

オイラーパラメータを、列マトリックスにより

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=[p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T=[p_0 \quad \mathbf{p}^T]^T \tag{6.2}
$$

と書くと、四つの成分はつぎのように定義される。

$$
\left.\begin{aligned} p_0 &= \cos\frac{\Theta}{2} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{u}\sin\frac{\Theta}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.3}
$$

オイラーパラメータにはつぎの正規化の条件がある。

$$
\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}=p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2=1 \tag{6.4}
$$

回転変換マトリックス$\mathbf{A}$は、式(6.1a)または(6.1b)より

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &\underset{(6.1\mathrm{a})}{=} \mathbf{u}\,\mathbf{u}^T + \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{u}\,\mathbf{u}^T\right)\cos\Theta + \tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \\
&= \cos\Theta\mathbf{I}_3 + (1-\cos\Theta)\mathbf{u}\,\mathbf{u}^T + \tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \\
&= (2\cos^2\frac{\Theta}{2} - 1)\mathbf{I}_3 + 2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}\mathbf{u}\,\mathbf{u}^T + \cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\tilde{\mathbf{u}}\right)
\end{aligned}
$$

または

$$
\mathbf{A} \underset{(6.1\mathrm{b})}{=} \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{u}}\sin\frac{\Theta}{2}\left(\cos\frac{\Theta}{2}\mathbf{I}_3 + \sin\frac{\Theta}{2}\tilde{\mathbf{u}}\right)
$$

となるから、オイラーパラメータを用いて

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left(2p_0^2 - 1\right)\mathbf{I}_3 + 2\left(\mathbf{p}\mathbf{p}^T + p_0\tilde{\mathbf{p}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2\left(p_0^2 + p_1^2\right) - 1 & 2\left(p_1p_2 - p_0p_3\right) & 2\left(p_1p_3 + p_0p_2\right) \\ 2\left(p_1p_2 + p_0p_3\right) & 2\left(p_0^2 + p_2^2\right) - 1 & 2\left(p_2p_3 - p_0p_1\right) \\ 2\left(p_1p_3 - p_0p_2\right) & 2\left(p_2p_3 + p_0p_1\right) & 2\left(p_0^2 + p_3^2\right) - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (6.5\mathrm{a})
$$

または

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}\left(p_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 - 2\left(p_2^2 + p_3^2\right) & 2\left(p_1p_2 - p_0p_3\right) & 2\left(p_1p_3 + p_0p_2\right) \\ 2\left(p_1p_2 + p_0p_3\right) & 1 - 2\left(p_1^2 + p_3^2\right) & 2\left(p_2p_3 - p_0p_1\right) \\ 2\left(p_1p_3 - p_0p_2\right) & 2\left(p_2p_3 + p_0p_1\right) & 1 - 2\left(p_1^2 + p_2^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (6.5\mathrm{b})
$$

と書ける。