SL第44回　SL-44-MBD(1)_7.9_仮想速度

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第44回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回(九回に変更)にわたって講義している。今回はその九回目(最終回)として「角速度の変分」について学ぶ。　2023.12.21　清水

7.4.2　角速度の変分

角速度の変分を求めるために式(5.17b)と(5.17a)を用いる。これらの変分をそれぞれとると $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} \equiv \tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}$ ，$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \equiv \tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB}$ と略記して

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} = (\delta\mathbf{A}^{OB})^T\dot{\mathbf{A}}^{OB} + (\mathbf{A}^{OB})^T\delta\dot{\mathbf{A}}^{OB} \tag{7.43a}$$

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = \delta\dot{\mathbf{A}}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^T + \dot{\mathbf{A}}^{OB}(\delta\mathbf{A}^{OB})^T \tag{7.43b}$$

を得る。これらと無限小回転の時間微分との関係を求めるために式(7.17)、(7.13)を時間微分すると

$$\boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}'^{OB} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}) = \left(\mathbf{A}^{OB}\right)^T\delta\dot{\mathbf{A}}^{OB} + \left(\dot{\mathbf{A}}^{OB}\right)^T\delta\mathbf{A}^{OB} \tag{7.44a}$$

$$\boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^{OB} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}) = \delta\mathbf{A}^{OB}\left(\dot{\mathbf{A}}^{OB}\right)^T + \delta\dot{\mathbf{A}}^{OB}\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^T \tag{7.44b}$$

を得る。式(7.43a)と(7.44a)および式(7.43b)と(7.44b)より、それぞれ

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} &= \boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}'^{OB} + (\delta\mathbf{A}^{OB})^T\dot{\mathbf{A}}^{OB} - (\dot{\mathbf{A}}^{OB})^T\delta\mathbf{A}^{OB} \\ &\underset{(5.16)}{=} \boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}'^{OB} + (\delta\mathbf{A}^{OB})^T\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} - (\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB})^T\delta\mathbf{A}^{OB} \\ &\underset{(7.17)}{=} \boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}'^{OB} - \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}\end{aligned} \tag{7.45a}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB} &= \boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^{OB} + \dot{\mathbf{A}}^{OB}(\delta\mathbf{A}^{OB})^T - \delta\mathbf{A}^{OB}(\dot{\mathbf{A}}^{OB})^T \\ &\underset{(5.16)}{=} \boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^{OB} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OBT}\mathbf{A}^{OB}(\delta\mathbf{A}^{OB})^T - \delta\mathbf{A}^{OB}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\mathbf{A}^{OB})^T \\ &\underset{(7.13)}{=} \boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^{OB} + \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}\end{aligned} \tag{7.45b}$$

式(7.45a)と(7.45b)よりチルダオペレータをはずす。[公式2.1]の式(2.39)の性質を利用して

$$\delta\boldsymbol{\omega}'^{OB}=\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \tag{7.46a}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}^{OB}=\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{OB}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\boldsymbol{\delta\theta}^{OB} \tag{7.46b}$$

となる。つぎに$(\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}'^{OB})^{\sim}$を計算すると

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}'^{OB})^{\sim} &\underset{(4.20)}{=}\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}'^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\underset{(7.44a)}{=}\delta\dot{\mathbf{A}}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T}+\mathbf{A}^{OB}(\dot{\mathbf{A}}^{OB})^{T}\delta\mathbf{A}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\\ &\underset{(7.43b)}{=}\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}-\dot{\mathbf{A}}^{OB}(\delta\mathbf{A}^{OB})^{T}+\mathbf{A}^{OB}(\dot{\mathbf{A}}^{OB})^{T}\delta\mathbf{A}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\\ &\underset{(5.16)}{=}\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}-\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}(\delta\mathbf{A}^{OB})^{T}+\mathbf{A}^{OB}(\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB})^{T}\delta\mathbf{A}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\\ &=\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}+\mathbf{A}^{OB}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB})^{T}(\delta\mathbf{A}^{OB})^{T}-\mathbf{A}^{OB}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB})^{T}(\delta\mathbf{A}^{OB})^{T}\mathbf{A}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\\ &=\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\end{aligned} \tag{7.47a}$$

となる。同様に$((\mathbf{A}^{OB})^{T}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{OB})^{\sim}$を計算すると

$$\begin{aligned}((\mathbf{A}^{OB})^{T}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{OB})^{\sim} &\underset{(4.20)}{=}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\boldsymbol{\delta}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^{OB}\mathbf{A}^{OB}\underset{(7.44b)}{=}(\mathbf{A}^{OB})^{T}\delta\dot{\mathbf{A}}^{OB}+(\mathbf{A}^{OB})^{T}\delta\mathbf{A}^{OB}(\dot{\mathbf{A}}^{OB})^{T}\mathbf{A}^{OB}\\ &\underset{(7.43a)}{=}\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}-(\delta\mathbf{A}^{OB})^{T}\dot{\mathbf{A}}^{OB}+(\mathbf{A}^{OB})^{T}\delta\mathbf{A}^{OB}(\dot{\mathbf{A}}^{OB})^{T}\mathbf{A}^{OB}\\ &=\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\end{aligned} \tag{7.47b}$$

となる。したがって式(7.47a)と(7.47b)で両辺のチルダオペレーションをはずして、物体固定枠の成分表示と全体枠の成分表示の相互関係式

$$\delta\boldsymbol{\omega}'^{OB}=(\mathbf{A}^{OB})^{T}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{OB} \tag{7.48a}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}^{OB}=\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}'^{OB} \tag{7.48b}$$

を得る。

7.4.3　角加速度の変分

角加速度の変分は式(7.46a)と(7.46b)の時間に関する直接微分により

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}=\boldsymbol{\delta}\ddot{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}+\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}'^{OB}\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \tag{7.49a}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = \boldsymbol{\delta}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^{OB} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{OB} - \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^{OB}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^{OB} \tag{7.49b}$$

となる。