SL第43回　　SL-43-MBD(1)_7.8_仮想速度

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第43回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその八回目として「仮想速度」について学ぶ。　　2023.11.16　清水

7.4　速度と角速度の変分量

7.4.1 仮想速度

仮想速度(virtual velocity)は時間および系の配位を固定したときの速度の微小な変分であり、物理座標に対しては$\delta\dot{x}, \delta\dot{y}, \delta\dot{z}$と書かれる。一般化速度に対しては$\delta\dot{q}_k$,$(k=1,2,\cdots,n)$と書かれる。

速度ベクトル$\vec{\mathbf{v}}$を、基準枠$O-xyz$において$\vec{\mathbf{v}}=\dot{\vec{\mathbf{r}}}=\dot{x}(t)\vec{\mathbf{e}}_x+\dot{y}(t)\vec{\mathbf{e}}_y+\dot{z}(t)\vec{\mathbf{e}}_z$と表わすとその微小変分、すなわち仮想速度は

$$\delta\vec{\mathbf{v}}=\delta\dot{\vec{\mathbf{r}}}=\delta\dot{x}\vec{\mathbf{e}}_x+\delta\dot{y}\vec{\mathbf{e}}_y+\delta\dot{z}\vec{\mathbf{e}}_z=\mathbf{e}^T\delta\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{e}^T\delta\mathbf{v} \tag{7.40a}$$

と書ける。ここで$\mathbf{e}=[\vec{\mathbf{e}}_x\ \ \vec{\mathbf{e}}_y\ \ \vec{\mathbf{e}}_z]^T$は枠$O-xyz$のベクトリックス、$\delta\mathbf{v}=\delta\dot{\mathbf{r}}=[\delta\dot{x}\ \ \delta\dot{y}\ \ \delta\dot{z}]^T$は枠$O$の成分表示による速度の微小変分である。速度$\vec{\mathbf{v}}$の微小変分は時間および配位を固定している($\delta q_i=0$, $\delta t=0,\ i=1,2,\cdots,n$)ので、位置ベクトル$\vec{\mathbf{r}}$が一般化座標により$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$と書けるとすると、一般化速度$\vec{\mathbf{v}}$は$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)$となり、微小な一般化速度に対して

$$\delta\vec{\mathbf{v}}=\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial\dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial\dot{q}_2}\delta\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial\dot{q}_n}\delta\dot{q}_n=\mathbf{e}^T\mathbf{G}\delta\dot{\mathbf{q}}\ ,\ \ \delta\dot{\mathbf{q}}=[\delta\dot{q}_1\ \ \delta\dot{q}_2\ \cdots\ \delta\dot{q}_n]^T \tag{7.40b}$$

となる。ここで$\mathbf{G}$はヤコビアンマトリックス、$\delta\dot{\mathbf{q}}$は一般化速度の微小変分のベクトルであり

$$\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_1}\ \ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_2}\ \cdots\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_n}\right]\underset{(7.4)}{=}\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\ \ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}\ \cdots\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_n}\right]\equiv\mathbf{G}\ ,\ \ \delta\dot{\mathbf{q}}=[\delta\dot{q}_1\ \ \delta\dot{q}_2\ \cdots\ \delta\dot{q}_n]^T \tag{7.41}$$

である。図4.2（下図)を考える。点Pは剛体Bに固定されているとする。この場合、点Pの速度は式(5.45)（${}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}={}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{s}}^{P}$）により与えられるから仮想速度は

$$\delta\,{}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}=\sum_{k=1}\frac{\partial\,{}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k=\sum_{k=1}\left(\frac{\partial\,{}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B}}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}}{\partial\dot{q}_k}\times\vec{\mathbf{s}}^{P}\right)\delta\dot{q}_k \tag{7.42a}$$

となる。代数ベクトル表示では

$$\begin{aligned}\delta\,{}^{O}\mathbf{v}^{P}&=\sum_{k=1}\frac{\partial\,{}^{O}\mathbf{v}^{P}}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k=\sum_{k=1}\left(\frac{\partial\,{}^{O}\mathbf{v}^{B}}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}}{\partial\dot{q}_k}\mathbf{s}^{P}\right)\delta\dot{q}_k\\&\underset{(5.49)}{=}\sum_{k=1}\left(\frac{\partial\,{}^{O}\mathbf{v}^{B}}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial(\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB})}{\partial\dot{q}_k}\mathbf{s}'^{P}\right)\delta\dot{q}_k\end{aligned} \tag{7.42b}$$

となる。

[補足資料]　Short Lecture 12回目で学んだ図4.2とその説明を再掲する。

図4.2のように3次元空間内に点O,Pをとる。この2点を結んだ点間ベクトルを$\vec{\mathbf{r}}^{OP}$と書く。点Pは剛体B上にあるものとする。

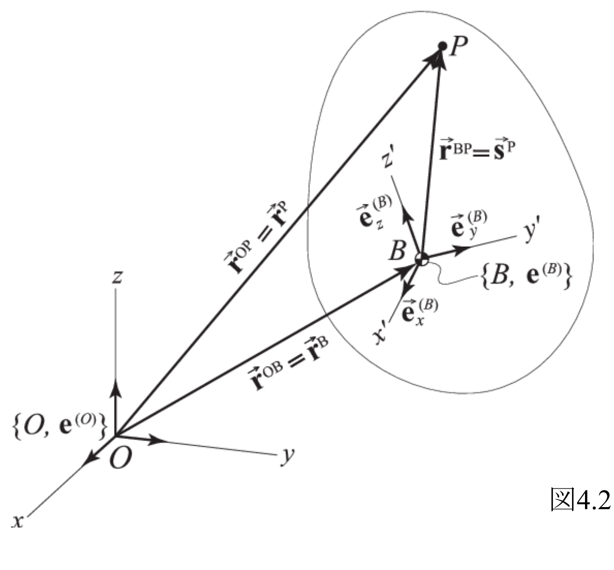

図4.2　剛体B上の点Pの位置