SL第42回　SL-42-MBD(1)_7.7_相対回転角の変分の例題

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第42回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその七回目として「相対回転角の変分の例題」について学ぶ。　2023.10.26　清水

[例題7.2] 相対回転角の変分(仮想回転による表現)

[例題6.1]の問題を考える（後述の[補足資料]を参照)。図6. 2の相対回転の変分を考えると、仮想回転 $\boldsymbol{\delta\theta}^{Oi}$ と $\boldsymbol{\delta\theta}^{Oj}$ を用いて

$$\delta\phi\mathbf{e}_z^i = \boldsymbol{\delta\theta}^{Oj} - \boldsymbol{\delta\theta}^{Oi} \tag{7.37}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \mathbf{e}_z^{iT}(\boldsymbol{\delta\theta}^{Oj} - \boldsymbol{\delta\theta}^{Oi}) = (\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{e}_z'^{i})^T(\mathbf{A}^{Oj}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} - \mathbf{A}^{Oi}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}) \\ &= \mathbf{e}_z'^{iT}\left\{(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} - \boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi})\right\} \\ &= \mathbf{e}_z'^{iT}(\mathbf{A}^{ij}\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} - \boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi})\end{aligned} \tag{7.38}$$

この式は付録8.3.2(3)の式変形において使用される。

[例題7.3] 相対回転角の変分(オイラーパラメータの変分による表現)

[例題7.2]の相対回転の変分をオイラーパラメータの変分により表わすと[例題7.2]の式(7.38)に(7.23)(注)を代入して

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \mathbf{e}_z'^{iT}\left\{2\mathbf{A}^{ij}\mathbf{L}^{Oj}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} - 2\mathbf{L}^{Oi}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\right\} \\ &= 2\mathbf{e}_z'^{iT}\mathbf{A}^{ij}\mathbf{L}^{Oj}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} - 2\mathbf{e}_z'^{iT}\mathbf{L}^{Oi}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \\ &= 2((\mathbf{L}^{Oj})^T\mathbf{A}^{ji}\mathbf{e}_z'^{i})^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} - 2((\mathbf{L}^{Oi})^T\mathbf{e}_z'^{i})^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\end{aligned} \tag{7.39}$$

(注) 仮想回転 $\boldsymbol{\delta\theta}^{Oi}$ とオイラーパラメータの変分の関係式(7.23) は

$$\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} = 2\mathbf{L}^{OB}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} \tag{7.23}$$

と書ける。

[補足資料]　Short Lecture 29回目で学んだ[例題6.1] を再掲する。

[例題6.1] z_i 軸と z_j 軸が平行な場合の相対回転

図6.2は枠 $i-x_i y_i z_i$ が z_i 軸を回転軸として反時計まわりに角度 ϕ だけ回転して枠 $j-x_j y_j z_j$ になったときの状態である。z_i 軸と z_j 軸は平行である。方向余弦の性質より $\vec{\mathbf{e}}_x^{(i)} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x^{(j)} = \cos\phi$ となる。これを全体枠 O の成分表示で表わすと

$$\mathbf{e}_x^{iT} \mathbf{e}_x^j = \cos\phi \tag{6.31}$$

また、外積の定義 $\vec{\mathbf{e}}_x^{(i)} \times \vec{\mathbf{e}}_x^{(j)} = \vec{\mathbf{e}}_z^{(i)} \sin\phi$ より

$$\tilde{\mathbf{e}}_x^i \mathbf{e}_x^j = \mathbf{e}_z^i \sin\phi \tag{6.32}$$

となる。式(6.32)の両辺に左から $\mathbf{e}_z^{iT}$ を作用させると、$\tilde{\mathbf{e}}_x^{iT} = -\tilde{\mathbf{e}}_x^i$ を用いて

$$\sin\phi = \mathbf{e}_z^{iT} \tilde{\mathbf{e}}_x^i \mathbf{e}_x^j = (\tilde{\mathbf{e}}_x^{iT} \mathbf{e}_z^i)^T \mathbf{e}_x^j = -(\tilde{\mathbf{e}}_x^i \mathbf{e}_z^i)^T \mathbf{e}_x^j = \mathbf{e}_y^{iT} \mathbf{e}_x^j \tag{6.33}$$

を得る。式(6.31)、式(6.33)を各ベクトルが固定されている枠の成分表示で表すと

$$\cos\phi = (\mathbf{e}'^i_x)^T (\mathbf{A}^{Oi})^T (\mathbf{A}^{Oj} \mathbf{e}'^j_x) = (\mathbf{e}'^i_x)^T \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}'^j_x \tag{6.34}$$

$$\sin\phi = (\mathbf{e}'^i_y)^T (\mathbf{A}^{Oi})^T (\mathbf{A}^{Oj} \mathbf{e}'^j_x) = (\mathbf{e}'^i_y)^T \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}'^j_x \tag{6.35}$$

となる。これらより ϕ が求められる。

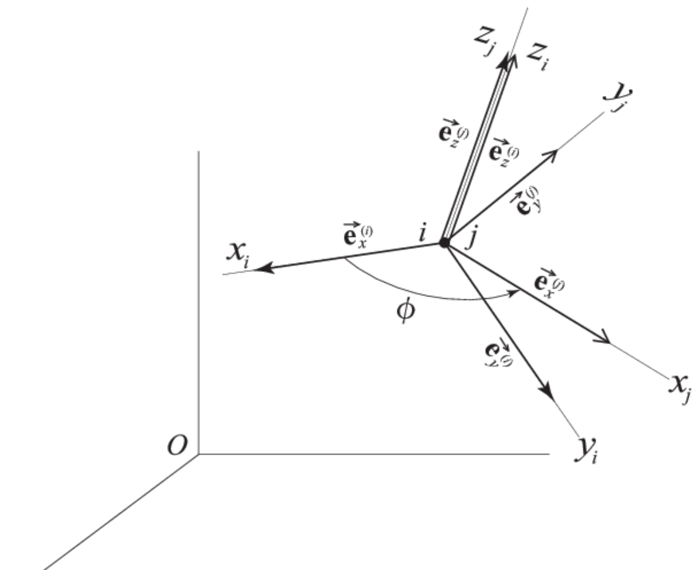

図6.2　軸 z_i と軸 z_j とが平行な場合の相対回転