SL第41回　SL-41-MBD(1)_7.6_相対姿勢の変分と相対角速度

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第41回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその六回目として「相対姿勢の変分と相対角速度」について学ぶ。　2023.09.28　清水

7.3 相対姿勢の変分と相対角速度

6.3.1項で相対姿勢とその座標変換を扱った。図6. 1(下図)において基準枠として全体枠O、基準枠i、基準枠jの3つの枠を扱った。

基準枠jから基準枠iへ変換する相対座標変換マトリックス$\mathbf{A}^{ij}$は式(6. 29)により

$$\mathbf{A}^{ij}=(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj} \tag{7. 31}$$

と表わされた。ここで$\mathbf{A}^{Oi}$、$\mathbf{A}^{Oj}$はそれぞれ枠iから枠Oへ、枠jから枠Oへの座標変換マトリックスである。式(7. 31)より

$$\mathbf{A}^{Oj}=\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{A}^{ij} \tag{7. 32}$$

である。この式の変分をとると

$$\delta\mathbf{A}^{Oj}=\delta\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{A}^{ij}+\mathbf{A}^{Oi}\delta\mathbf{A}^{ij} \tag{7. 33}$$

となる。式(7. 33)の両辺に左から$(\mathbf{A}^{Oj})^T$をかけると

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{Oj})^T\delta\mathbf{A}^{Oj}&=(\mathbf{A}^{Oj})^T\delta\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{A}^{ij}+(\mathbf{A}^{Oj})^T\mathbf{A}^{Oi}\delta\mathbf{A}^{ij}\\&\underset{(7.32),(7.31)}{=}(\mathbf{A}^{ij})^T(\mathbf{A}^{Oi})^T\delta\mathbf{A}^{Oi}\mathbf{A}^{ij}+(\mathbf{A}^{ij})^T\delta\mathbf{A}^{ij}\end{aligned}$$

これより式(7.17)を用いて

$$\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{Oj} = (\mathbf{A}^{ij})^T \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{Oi} \mathbf{A}^{ij} + \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{ij} \tag{7.34}$$

を得る。両辺からチルダオペレーションをはずすとベクトルの関係式

$$\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj} = (\mathbf{A}^{ij})^T \boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi} + \boldsymbol{\delta\theta}'^{ij} \tag{7.35a}$$

を得る。ここで$\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oj}$、$\boldsymbol{\delta\theta}'^{Oi}$、$\boldsymbol{\delta\theta}'^{ij}$はそれぞれ枠$O$に対する枠$j$の、枠$O$に対する枠$i$の、枠$i$に対する枠$j$の仮想回転である。これらはそれぞれ枠$j$、枠$i$、枠$j$における成分で表わしている。同様の手順で角速度に対する式を求めることができ式(7.35a)と対比して

$$\boldsymbol{\omega}'^{Oj} = (\mathbf{A}^{ij})^T \boldsymbol{\omega}'^{Oi} + \boldsymbol{\omega}'^{ij} \tag{7.36a}$$

となる。

一方、式(7.35a)を式(7.15)の関係を用いて変形すると

$$\boldsymbol{\delta\theta}^{Oj} = \boldsymbol{\delta\theta}^{Oi} + \mathbf{A}^{Oi} \boldsymbol{\delta\theta}^{ij} \tag{7.35b}$$

を得る。式(7.35b)を参考に角速度に対する式は

$$\boldsymbol{\omega}^{Oj} = \boldsymbol{\omega}^{Oi} + \mathbf{A}^{Oi} \boldsymbol{\omega}^{ij} \tag{7.36b}$$

となる。

[補足説明1]　文字の説明

$\boldsymbol{\omega}'^{Oj}$、$\boldsymbol{\omega}'^{Oi}$、$\boldsymbol{\omega}'^{ij}$はそれぞれ枠$O$に対する枠$j$の、枠$O$に対する枠$i$の、枠$i$に対する枠$j$の回転角速度である。これらはそれぞれ枠$j$、枠$i$、枠$j$における成分で表わしている。

[補足説明2]　式(7.34)の導出

式(7. 17)より $\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{Oj} = \left(\mathbf{A}^{Oj}\right)^T \delta\mathbf{A}^{Oj}$ と書けるから

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{Oj} &= (\mathbf{A}^{Oj})^T \delta\mathbf{A}^{Oj} \\
&= (\mathbf{A}^{Oi}\,\mathbf{A}^{ij})^T (\delta\mathbf{A}^{Oi}\,\mathbf{A}^{ij} + \mathbf{A}^{Oi}\,\delta\mathbf{A}^{ij}) \\
&= (\mathbf{A}^{ij})^T \underbrace{(\mathbf{A}^{Oi})^T \delta\mathbf{A}^{Oi}}_{=\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{Oi}} \mathbf{A}^{ij} + \underbrace{(\mathbf{A}^{ij})^T \delta\mathbf{A}^{ij}}_{=\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{ij}} \\
&= (\mathbf{A}^{ij})^T \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{Oi} \mathbf{A}^{ij} + \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{ij}
\end{aligned}
$$

を得る。

[付] 他の章、節の図および式

$$\mathbf{A}^{ij} \equiv (\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{A}^{Oj} \qquad (6.29)$$

$$\boldsymbol{\delta\theta}^{OB} = \mathbf{A}^{OB} \boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \qquad (7.15)$$

$$\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB} = \left(\mathbf{A}^{OB}\right)^T \delta\mathbf{A}^{OB} \qquad (7.17)$$

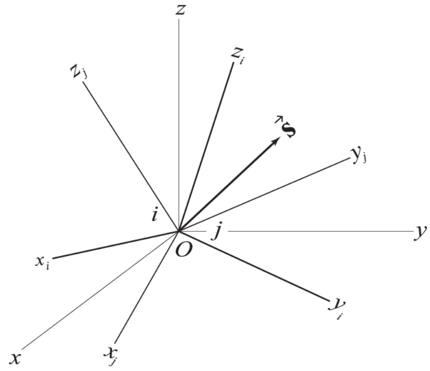

図6.1　三つの基準枠による
ベクトル $\vec{\mathbf{s}}$ の表現