もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第40回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその五回目として「仮想回転とオイラーパラメータの変分およびオイラー角の変分」について学ぶ。　2023.08.24

清水

7.2　仮想回転とオイラーパラメータの変分およびオイラー角の変分

仮想回転とオイラーパラメータの変分の関係は、角速度とオイラーパラメータの時間微分の関係と対応する。したがって角速度を仮想回転に、オイラーパラメータの時間微分をオイラーパラメータの変分におきかえることにより形式的に求められる。まず式(6.57)、式(6.59)に対応して

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{OB}\right)^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} = \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB}\right)^T \boldsymbol{\varepsilon}^{OB} = 0 \tag{7.21}$$

$$\delta\mathbf{A}^{OB} = \delta\mathbf{E}^{OB}(\mathbf{L}^{OB})^T + \mathbf{E}^{OB}\delta(\mathbf{L}^{OB})^T = 2\mathbf{E}^{OB}\delta(\mathbf{L}^{OB})^T = 2\delta\mathbf{E}^{OB}(\mathbf{L}^{OB})^T \tag{7.22}$$

が求められる。同様に式(6.53)、(6.55)に対応して

$$\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} = 2\mathbf{L}^{OB}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} \tag{7.23}$$

$$\boldsymbol{\delta\theta}^{OB} = 2\mathbf{E}^{OB}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} \tag{7.24}$$

が求められる。さらに式(6.54)、(6.56)に対応して

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \tag{7.25}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{OB})^T\boldsymbol{\delta\theta}^{OB} \tag{7.26}$$

が求められる。

仮想回転とオイラー角の変分の関係は式(5.52b)、式(5.55)に対応して

$$\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} = \mathbf{G}'_E\,\delta\boldsymbol{\theta}_E \tag{7.27}$$

$$\boldsymbol{\delta\theta}^{OB} = \mathbf{G}_E \, \delta\boldsymbol{\theta}_E \tag{7.28}$$

と書ける。ただし$\mathbf{G}'_E$, $\mathbf{G}_E$は式(5.53)、式(5.56)により与えられている。

タイト・ブライヤン角の変分に関しては、式(5.57)に対応して式(5.58)の $\mathbf{G}'_T$ を用いて

$$\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} = \mathbf{G}'_T \, \delta\boldsymbol{\theta}_T \tag{7.29}$$

と書ける。

ブライヤント角の変分に関しては式(5.60)に対応して式(5.61)の $\mathbf{G}'_B$ を用いて

$$\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} = \mathbf{G}'_B \, \delta\boldsymbol{\theta}_B \tag{7.30}$$

と書ける。

[付] 他の章の式

$$\mathbf{G}'_E = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

$$\mathbf{G}_E = \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

$$\mathbf{G}'_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

$$\mathbf{G}'_B = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.61}$$