SL第39回	SL-39-MBD(1)_7.4_座標変換マトリックスの変分と仮想回転

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第39回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその四回目として「座標変換マトリックスの変分と仮想回転」について学ぶ。　　2023.07.27　清水

7.1 仮想変位と仮想回転のつづき

図4.2の点 P を考える。この点 P は剛体 B に固定されているとする。$\delta\vec{\mathbf{r}}^{P}$ を点 P の仮想変位とする。$\mathbf{s}'^{P}$ は不変であるから式(4.28)（末尾の[付])より

$$\delta\mathbf{r}^{P}=\delta\mathbf{r}^{B}+\delta\mathbf{s}^{P}=\delta\mathbf{r}^{B}+\delta\mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^{P}\quad(7.10)$$

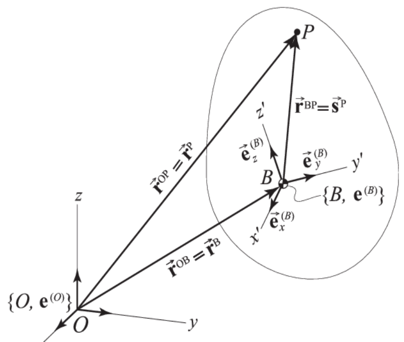

図4.2　物体上の点 P

となる。式の変形を進めるためには $\delta\mathbf{A}^{OB}$ の計算が必要である。

式(4.　3)より座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ は $\mathbf{A}^{OB}\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}=\mathbf{I}_{3}$ と書ける。この変分を計算し移項すると

$$\mathbf{A}^{OB}\left(\delta\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}=-\delta\mathbf{A}^{OB}\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}\qquad(7.11)$$

を得る。一方、

$$\mathbf{A}^{OB}(\delta\mathbf{A}^{OB})^{T}=(\delta\mathbf{A}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^{T})^{T}\qquad(7.12)$$

が成り立つから、式(7.11)と式(7.12)より $\delta\mathbf{A}^{OB}\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}$ はひずみ対称マトリックスであることがわかる。これを、代数ベクトル $\boldsymbol{\delta\theta}^{OB}$ を用いて

$$\boldsymbol{\delta\tilde{\theta}}^{OB}\equiv\delta\mathbf{A}^{OB}\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}\qquad(7.1.9)$$

と定義する。$\boldsymbol{\delta\theta}^{OB}$ は枠 O に対する枠 B の仮想回転と呼ばれる。$\boldsymbol{\delta\theta}^{OB}$ は積分でき

ないから、$\boldsymbol{\theta}^{OB}$ が存在する訳ではないことに注意されたい(5.1.1項参照)。これは枠Oの成分表示で表わされている。$\delta\mathbf{A}^{OB}$ は $\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}$ を用いて

$$\delta\mathbf{A}^{OB} = \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}\mathbf{A}^{OB} \tag{7.14}$$

と表わされる。

ベクトル $\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}}^{OB}$ の枠Oの成分表示 $\boldsymbol{\delta\theta}^{OB}$ と、枠Bの成分表示 $\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB}$ の関係は

$$\boldsymbol{\delta\theta}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \tag{7.15}$$

となるから、両辺に外積オペレータを作用させ

$$\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB} = \left(\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB}\right)^{\sim} \underset{(4.20)}{=} \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}$$

よって

$$\delta\mathbf{A}^{OB} \underset{(7.14)}{=} \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}\mathbf{A}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB} \tag{7.16}$$

となる。この式は $\mathbf{A}^{OB}$ の時間微分に関するポアソンの方程式(5. 16)([付]参照)と対応している。すなわち変換マトリックスの変分は変換マトリックスの時間微分に対応し、仮想回転は角速度に対応している。

式(7. 16)の第1項と第3項から式(7. 13)に対応する

$$\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB} = \left(\mathbf{A}^{OB}\right)^{T}\delta\mathbf{A}^{OB} \tag{7.17}$$

を得る。式(7. 10)に式(7. 14)および $\mathbf{s}^{P} = \mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^{P}$ の関係式を代入すると

$$\delta\mathbf{r}^{P} = \delta\mathbf{r}^{B} + \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}\mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^{P} = \delta\mathbf{r}^{B} + \boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{OB}\mathbf{s}^{P} \tag{7.18}$$

となる。これに式 (7. 16)を代入し変形すると

$$\delta\mathbf{r}^{P} = \delta\mathbf{r}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}\mathbf{s}'^{P} = \delta\mathbf{r}^{B} - \mathbf{A}^{OB}\tilde{\mathbf{s}}'^{P}\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \tag{7.19}$$

を得る。式(7. 10)と式(7. 19)を比較して、変位に寄与する回転の項は

$$\delta\mathbf{s}^{P} = \delta\mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^{P} = \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}\mathbf{s}'^{P} = -\mathbf{A}^{OB}\tilde{\mathbf{s}}'^{P}\boldsymbol{\delta\theta}'^{OB} \tag{7.20}$$

と整理できる。

[付] 他の章の式

$$\mathbf{r}^{P} = \mathbf{r}^{B} + \mathbf{s}^{P} = \mathbf{r}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^{P} \tag{4.28}$$

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\mathbf{A}^{OB} \tag{5.16}$$