SL第38回　　SL-38-MBD(1)_7.3_速度の式から仮想変位を導出する方法

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第38回目。7章の仮想変位，仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその三回目として「速度の式から仮想変位を導出する方法」について例題を通して学ぶ。　　2023.06.08　清水

［例題7.1］速度の式からの仮想変位の導出

図4.2において点 P が剛体 B 上に固定されているとすると，点 P の速度は式(5.45)により

$$ {}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P} = {}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{s}}^{P} \tag{7.6} $$

と書けるから，点 P の変位の変分は式（7.1b)を求める手順を参考に式(7.5)から

$$ \delta\vec{\mathbf{r}}^{P} = \delta\vec{\mathbf{r}}^{B} + \boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{s}}^{P} \tag{7.7} $$

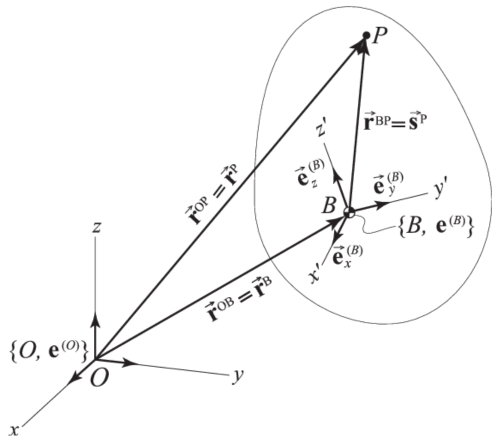

図4.2　物体上の点 P の位置

と求められる。ただし $\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}}$ は微小回転の変分である。式(7.6)，式(7.7)はそれぞれ枠 B の成分で表わすとそれぞれ次式となる。

$$ {}^{O}\mathbf{v}^{P} = {}^{O}\mathbf{v}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\mathbf{s}'^{P} \tag{7.8} $$

$$ \delta\mathbf{r}^{P} = \delta\mathbf{r}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{OB}\mathbf{s}'^{P} \tag{7.9} $$

ただし ${}^{O}\mathbf{v}^{P}$ ，${}^{O}\mathbf{v}^{B}$ ，$\delta\mathbf{r}^{P}$ ，$\delta\mathbf{r}^{B}$ は枠 O の成分表示ベクトルである。

[補足7.3_1]　式(7.6)から(7.7)の導出についての説明

すでにショートレクチャーSL-36の式(7.2a)の下4行目以降で説明したように

仮想変位は「位置ベクトル$\vec{\mathbf{r}}$の変分は位置ベクトルを解析的に表わし，一般化座標で微分することによって求めるか，$\vec{\mathbf{r}}$の時間微分を計算し，これにより$\vec{\mathbf{r}}$の時間に対する偏微分と時間に関する陽な式をすべて除き，<u>速度を仮想変位におきかえることにより求める</u>。」後者のやり方に従って，点Pの変位の変分式を求める。

　式(7. 6)は全体枠Oから見た点Pの速度${}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}$である。点$P$は剛体$B$上に固定されているから，この速度は剛体$B$の速度${}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B}$とこの剛体$B$が全体枠$O$に対して$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$だけ回転していることによって生じる併進速度$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{s}}^{P}$の和である。この式(7. 6)における物理量に対応する変分量は次の式の右側

$$\begin{aligned}
&{}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}=\frac{{}^{O}d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}^{P}) &&\Leftrightarrow\quad \delta\vec{\mathbf{r}}^{P}\\
&{}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B}=\frac{{}^{O}d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}^{B}) &&\Leftrightarrow\quad \delta\vec{\mathbf{r}}^{B}\\
&\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}dt=d\vec{\boldsymbol{\theta}} &&\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}}\,dt
\end{aligned}\tag{a}$$

であるから

$$\delta\vec{\mathbf{r}}^{P}=\delta\vec{\mathbf{r}}^{B}+\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}}\times\vec{\mathbf{s}}^{P}\tag{7. 7}$$

と書ける。ただし$d\vec{\boldsymbol{\theta}}$は一つのベクトルであり，回転に関する単位の回転軸ベクトル$\vec{\mathbf{n}}$と，その軸周りの無限小回転$d\Theta$により$d\vec{\boldsymbol{\theta}}=\vec{\mathbf{n}}\,d\Theta$により定められる。これは軸性ベクトルである。微小回転の変分$\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}}$は，$\vec{\boldsymbol{\theta}}$の数学的な変分計算により求められる量ではないので，文字δを使わずひとつのベクトルとして$\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\theta}}$と，書いている。