SL第36回　　SL-36-MBD(1)_7.1_7章仮想変位と仮想回転

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第36回目。7章の仮想変位、仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその一回目として仮想変位と仮想回転について学ぶ。　2023.04.13　清水

7.　仮想変位、仮想速度と変分

本章では仮想変位、仮想回転、仮想速度および変換マトリックスの変分、オイラーパラメータの変分などについて説明する。仮想と名のつくこれらの量は数学的には微小変分として定義されるものであり、仮想量と微小変分は等しい。これらは仮想仕事の原理や仮想パワーの原理などを理解するときの基礎となる。また、拘束方程式を導出するときにも利用される。

7.1 仮想変位と仮想回転

仮想変位(virtual displacement)は変位の微小変分である。微小な変分量は時間を固定してとられる。このような変分は、ある一つの許容状態の配位からその近傍の他の許容状態へ、微小に変化させるために仮想的にとられるものである。これによってそれらの状態の挙動を比較することができ、つり合条件を満す状態を見つけることができる。仮想変位は物理座標ではδx, δy, δzと書かれ、一般化座標では $\delta q_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ と書かれる。仮想変位は数学的には時間を固定し、物理座標の偏微分として与えられる。したがって、仮想変位の計算は微分の計算に密接に関連している。

図7.1のように点Pの位置ベクトルを基準枠$O-xyz$において$\vec{\mathbf{r}}=x\left(t\right)\vec{\mathbf{e}}_x+y\left(t\right)\vec{\mathbf{e}}_y+z\left(t\right)\vec{\mathbf{e}}_z$と表わすと、その変分は時間を固定しているから$\delta(t)=0$であり、つぎのように書ける。

$$\delta\vec{\mathbf{r}}=\delta x\vec{\mathbf{e}}_x+\delta y\vec{\mathbf{e}}_y+\delta z\vec{\mathbf{e}}_z=\mathbf{e}^T\delta\mathbf{r} \tag{7.1a}$$

ここで$\mathbf{e}=[\vec{\mathbf{e}}_x\ \ \vec{\mathbf{e}}_y\ \ \vec{\mathbf{e}}_z]^T$は枠$O-xyz$のベクトリックス、$\delta\mathbf{r}=[\delta x\ \ \delta y\ \ \delta z]^T$は成分表

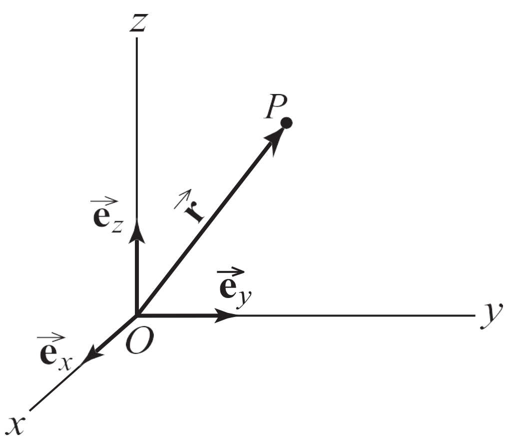


図7.1　基準枠Oにおける点ベクトル$\vec{\mathbf{r}}$

示の位置の変分である。位置ベクトル$\vec{\mathbf{r}}$が一般化座標により$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}\left(q_1, q_2, \cdots, q_n, t\right)$と書けるとすると、その変分は時間を固定しているから$\delta(t)=0$であり

$$\delta\vec{\mathbf{r}}=\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial q_n}\delta q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial q_k}\delta q_k=\mathbf{e}^T\mathbf{G}\delta\mathbf{q} \tag{7. 1b}$$

となる。ここで$\mathbf{G}$はヤコビアンマトリックス、$\delta\mathbf{q}$は一般化座標の変分のベクトルであり、つぎのように書ける。

$$\mathbf{G}=\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}\ \cdots\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_n}\right],\qquad \delta\mathbf{q}=[\delta q_1\ \ \delta q_2\ \cdots\ \delta q_n]^T \tag{7. 2a}$$

変分計算では時間微分を含むことがしばしばあるが、時間微分と変分オペレータは交換することができる。すなわち$\delta\dot{q}_k=\delta\left(dq_k/dt\right)$，$\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ $=d\left(\delta q_k\right)/dt$ と書ける。

位置ベクトル$\vec{\mathbf{r}}$の変分は位置ベクトルを解析的に表わし、一般化座標で微分することによって求めるか、$\vec{\mathbf{r}}$の時間微分を計算し、これにより$\vec{\mathbf{r}}$の時間に対する偏微分と時間に関する陽な式をすべて除き、速度を仮想変位におきかえることにより求める。$\vec{\mathbf{r}}$の時間微分は幾何ベクトルと枠Oでの成分に対して

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial t} = \mathbf{e}^T\left[\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right] \tag{7.3}$$

となる。式(7. 3)より前述の手順に従えば、$\vec{\mathbf{r}}$ の変分は式(7. 1b)と得られることが分かる。式(7. 3)を $\dot{q}_k$ で偏微分すると

$$\frac{\partial \dot{\vec{\mathbf{r}}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.4}$$

を得る。したがって

$$\delta\vec{\mathbf{r}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \dot{\vec{\mathbf{r}}}}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k = \mathbf{e}^T\mathbf{G}\delta\mathbf{q} \tag{7.5}$$

となる。ここで $\mathbf{G}$ は式(7.2a)の代わりに

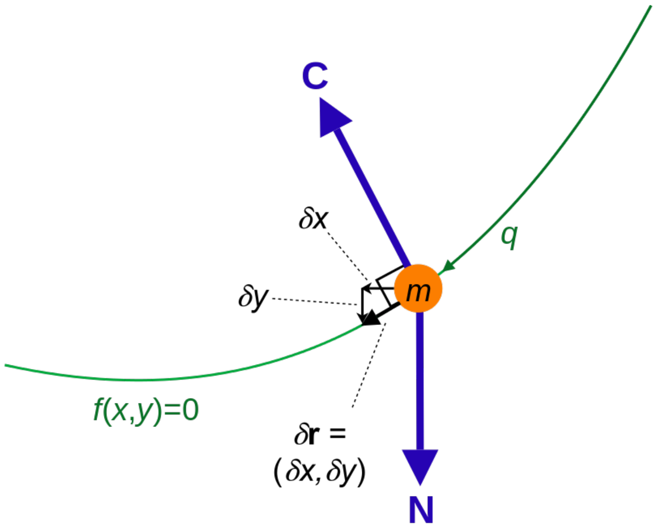
$$\mathbf{G} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_1}\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_2}\ \cdots\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_n}\right] \tag{7.2b}$$

と書けることに注意したい。

[補足説明7.1_1]　仮想変位について

物理学の一分野である解析力学において、仮想変位（または無限小変位）$\delta\vec{\mathbf{r}}$ は、機械システムの軌道が、システムの制約に違反することなく、システムの実際の軌道 $\vec{\mathbf{r}}$ から、仮にごくわずかどのように、逸脱するかを示すもの、と定義している。

あらゆる瞬間 t において、$\delta\vec{\mathbf{r}}(t)$ は点 $\vec{\mathbf{r}}(t)$ における配置 (または配位, configuration space) に対して接するベクトルとなる。したがって、ベクトル $\delta\vec{\mathbf{r}}(t)$ は $\vec{\mathbf{r}}(t)$ が制約を破ることなく運動する方向を示す(付図1参照)。



付図1　曲線に閉じ込められた質量 m の粒子の仮想変位 $\delta\mathbf{r}(t)$
C は拘束力、 **N** は合力(非拘束力)
https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_displacement より