SL第37回　SL-37-MBD(1)_7.2_仮想変位は時間を止めてとる

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第37回目。7章の仮想変位、仮想速度と変分の内容を十回にわたって講義している。今回はその二回目として「仮想変位は時間を止めてとる」ことについて学ぶ。　2023.04.27　清水

One point　仮想変位は時間をとめてとる

仮想変位は一般化座標の値が変化したときに生じる系の位置の変化である。図7. 2のように、配位空間内の一つの運動経路における時刻 t での位置を $\vec{\mathbf{r}}$ とすると、そのときの他の経路の対応する位置は $\vec{\mathbf{r}}+\delta\vec{\mathbf{r}}$ と書ける。仮想変位 $\delta\vec{\mathbf{r}}$ は微小量である。この仮想変位は時間を止めて考える。

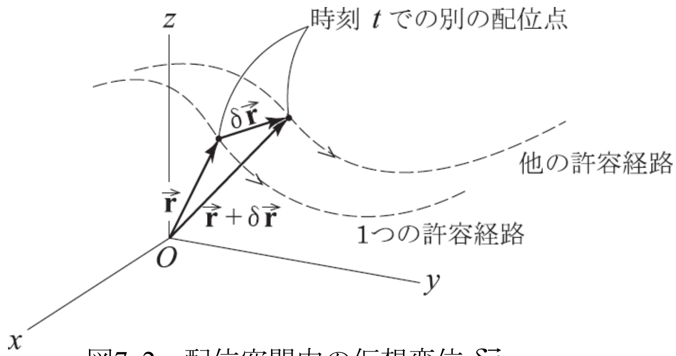


図7. 2　配位空間内の仮想変位 $\delta\vec{\mathbf{r}}$

図7.3は滑らかな床面上に配位拘束された球である。仮想変位は床面上に沿って左右にとることができる。この床面が時間とともに上下動をするとし、球は

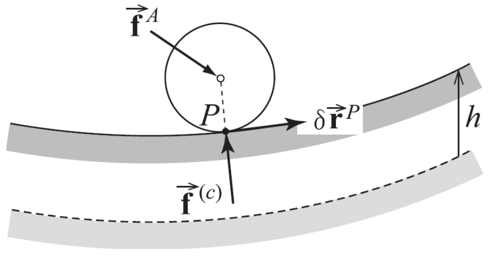


図7. 3　床面上の球と仮想変位

面から浮き上がらないとする。(時間を止めて想像した)仮想変位$\delta\vec{\mathbf{r}}^{P}$は、その瞬間での床面の接線方向を向く。点$P$において床面から球に働く拘束力$\vec{\mathbf{f}}^{(c)}$は面に垂直であるから、仮想変位$\delta\vec{\mathbf{r}}^{P}$のもとで拘束力により成される仮想仕事は零である(11.2節参照)。もし時間を止めないとすると、この間の微小変位は床面に接する方向には向かず、仕事は 0 とはならない。

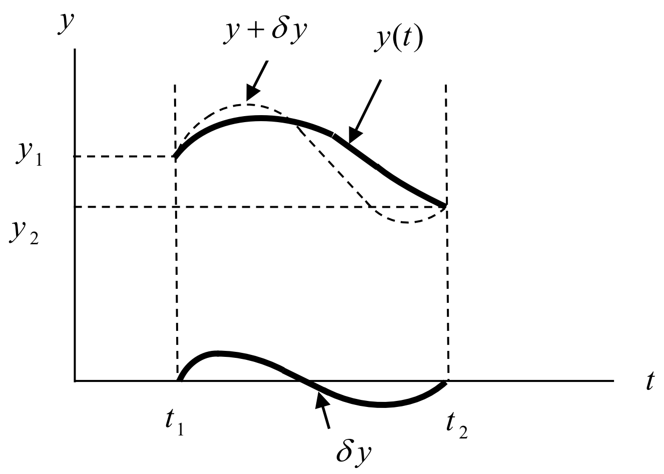
[補足説明7.2_1]　仮想変位と変位の変分

仮想変位は変位(空間座標)の変分である。これは動力学の問題の記述に適している。その理由は定式化が簡潔であること、物理的に解釈がしやすいこと、などによる。運動を物理的に解釈する場合には、変位の変分を仮想変位と呼ぶ方が自然であろう。

デカルト座標系において粒子の運動を考えてみよう。粒子の位置は位置ベクトル$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}\left(x(t),y(t),z(t),t\right)$により指定することができる。このとき$x,y,z$は従属変数であり、$t$は独立変数である。本文で述べたように位置ベクトルは時間に対して変分を受けない。すなわち

$$\delta\vec{\mathbf{r}}=\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial z}\delta z$$

である。この空間座標の変分を仮想変位と呼んでいる。時間に対する変分はないので、仮想変位は瞬時に起こると考えられる。このことにより、時刻を固定しながら別の位置の動的な系をイメージする仮想変位を考えることができる。すなわち粒子の任意の位置は、系の拘束を満たし、粒子がたどることができる許容経路内にあることになる。この状態をy座標に対して付図 1 に示した。



付図 1　粒子がたどる経路 $y(t)$ とその仮想変位 δy
(y 座標に対して示してある)