

今回はSL(short lecture)通算第35回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその九回目としてオイラーパラメータの高階微分の性質について学ぶ。 2023.02.02 清水

6.7 オイラーパラメータの高階微分の性質

6.7.1 オイラーパラメータの高階微分

オイラーパラメータの高階時間微分は式(6.57)より

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (6.81)$$

回転変換マトリックスの高階時間微分は式(6.59)より

$$\ddot{\mathbf{A}} = 2\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{L}}^T + 2\mathbf{E}\ddot{\mathbf{L}}^T = 2\ddot{\mathbf{E}}\mathbf{L}^T + 2\mathbf{E}\dot{\mathbf{L}}^T \quad (6.82)$$

を得る。これより次の等式を得る。

$$\ddot{\mathbf{E}}\mathbf{L}^T = \mathbf{E}\ddot{\mathbf{L}}^T \quad (6.83)$$

6.7.2 任意ベクトルを伴った分解マトリックスの高階微分

任意ベクトルを伴った分解マトリックスの高階微分は式(6.69)を時間で微分すると

$$\ddot{\mathbf{E}}^T \mathbf{b} + \dot{\mathbf{E}}^T \dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{B}}^+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}^+ \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

これに式(6.69)の $\mathbf{b}$ の代りに $\dot{\mathbf{b}}$ を用いた関係式 $\dot{\mathbf{E}}^T \dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{B}}^+ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を用いると

$$\ddot{\mathbf{E}}^T \mathbf{b} = \mathbf{B}^+ \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.84)$$

を得る。同様に式(6.70)より

$$\dot{\mathbf{L}}^T \mathbf{b} = \mathbf{B}^- \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.85)$$

を得る。式(6.82)の両辺に右から $\mathbf{b}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{A}}\mathbf{b} &\stackrel{(6.82)}{=} 2\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{b} + 2\mathbf{E}\ddot{\mathbf{L}}^T\mathbf{b} \stackrel{(6.85)}{=} 2\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{b} + 2\mathbf{E}\mathbf{B}^-\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
&\stackrel{(6.70)}{=} 2\dot{\mathbf{E}}\mathbf{B}^-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\mathbf{E}\mathbf{B}^-\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{6.86}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{A}}^T\mathbf{b} &\stackrel{(6.82)}{=} 2\mathbf{L}\ddot{\mathbf{E}}^T\mathbf{b} + 2\dot{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{b} \stackrel{(6.69)}{=} 2\mathbf{L}\ddot{\mathbf{E}}^T\mathbf{b} + 2\dot{\mathbf{L}}\mathbf{B}^+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
&\stackrel{(6.84)}{=} 2\mathbf{L}\mathbf{B}^+\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\dot{\mathbf{L}}\mathbf{B}^+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{6.87}$$

を得る。