SL第34回　SL-MBD(1)_6.8_角加速度とオイラーパラメータの高階時間微分

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第34回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその八回目として角加速度とオイラーパラメータの高階時間微分について学ぶ。　2023.01.12　清水

6.6 角加速度とオイラーパラメータの高階時間微分

式(6.53)を時間で微分し、式(6.66)の性質を用いると

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} = 2\mathbf{L}^{OB}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB} \tag{6.74}$$

を得る。同様に式(6.55)を時間で微分し、式(6.65)の性質を用いると

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = 2\mathbf{E}^{OB}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB} \tag{6.75}$$

を得る。逆にオイラーパラメータの時間微分を角加速度で表わすため式(6.54) の $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB} = (1/2)(\mathbf{L}^{OB})^T\boldsymbol{\omega}'^{OB}$ を時間で微分すると

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{L}}^{OB})^T\boldsymbol{\omega}'^{OB} + \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} \underset{(5.53)}{=} \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{L}}^{OB})^T(2\mathbf{L}^{OB}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} \underset{(6.62)}{=} -(\dot{\mathbf{L}}^{OB})^T\dot{\mathbf{L}}^{OB}\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} + \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} \\ &= -\{\frac{1}{4}\omega^2\mathbf{I}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB})^T\}\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} + \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} \\ &\underset{(6.57)}{=} -\frac{1}{4}\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} + \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\end{aligned} \tag{6.76a}$$

となる。ただし関係式

$$(\dot{\mathbf{L}}^{OB})^T\dot{\mathbf{L}}^{OB} = \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{I}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB})^T \tag{6.77}$$

を用いた。ここでωは角速度ベクトルの大きさである。式(6.77)が成り立つことは実際に左辺と右辺を計算してみると確認できる。同様に、式（6.56）の $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB} = (1/2)(\mathbf{E}^{OB})^T\boldsymbol{\omega}^{OB}$ を時間で微分すると、式(6.76a)と同じようにして

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB} = -\frac{1}{4}\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}^{OB} + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \tag{6.78a}$$

となる。ここで式(6.77)と類似の関係式

$$(\dot{\mathbf{E}}^{OB})^T\dot{\mathbf{E}}^{OB}=\frac{1}{4}\omega^2\mathbf{I}_4-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB})^T \tag{6.79}$$

を用いた。式(6.79)が成り立つことも左辺と右辺を計算してみると確認できる。なお、式(6.77)と(6.79)はオイラーパラメータに関する式(6.18)の時間微分対応式である。

式(6.76a)及び(6.78a)において

$$(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{\omega}'^{OB})^T\boldsymbol{\omega}'^{OB}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{\omega}^{OB})^T\boldsymbol{\omega}^{OB}=\frac{1}{4}\omega^2 \tag{6.80}$$

となるから式(6.76a)と(6.78a)は

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}=-\frac{1}{4}\{(\boldsymbol{\omega}'^{OB})^T\boldsymbol{\omega}'^{OB}\}\boldsymbol{\varepsilon}^{OB}+\frac{1}{2}(\mathbf{L}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} \tag{6.76b}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{OB}=-\frac{1}{4}\{(\boldsymbol{\omega}^{OB})^T\boldsymbol{\omega}^{OB}\}\boldsymbol{\varepsilon}^{OB}+\frac{1}{2}(\mathbf{E}^{OB})^T\dot{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \tag{6.78b}$$

と書ける。

[補足説明6.6_1]　式(6.77)と(6.79)が成立することの確認

簡単のために、以下では上付き添え字 OB は省略して書くことにする。

まず、式(6.77)の左辺を式(6.15)を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
(\dot{\mathbf{L}})^T\dot{\mathbf{L}}&=\begin{bmatrix}-\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}-\dot{\mathbf{p}}^T\\ \dot{p}_0\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}} & -\dot{\mathbf{p}}^T(\dot{p}_0\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}})\\ -(\dot{p}_0\mathbf{I}_3+\tilde{\dot{\mathbf{p}}})\dot{\mathbf{p}} & (\dot{p}_0\mathbf{I}_3+\tilde{\dot{\mathbf{p}}})(\dot{p}_0\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}})\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}} & -\dot{p}_0\dot{\mathbf{p}}^T\\ -\dot{p}_0\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0^2\mathbf{I}_3-\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{a}$$

を得る。ここで $\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_{3\times1}$, $\quad -\dot{\mathbf{p}}^T\tilde{\dot{\mathbf{p}}} = (\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\dot{\mathbf{p}})^T = \mathbf{0}_{1\times3}$ の関係を用いた。

つぎに、式(6.77)の右辺を式(6.2)を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\omega^2\mathbf{I}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T &= \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}'^T\boldsymbol{\omega}'\mathbf{I}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \underset{(6.53)}{=} \frac{1}{4}(2\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^T(2\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{I}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \\
&= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\mathbf{L}^T\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \underset{(6.18)}{=} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(\mathbf{I}_4 - \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \\
&\underset{(6.57)}{=} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T - \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\boldsymbol{\varepsilon})}_{=0}\underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}_{=0} \\
&= (\dot{p}_0^2 + \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}})\mathbf{I}_4 - \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{p}_0 & \dot{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} = (\dot{p}_0^2 + \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}})\mathbf{I}_4 - \begin{bmatrix} \dot{p}_0^2 & \dot{p}_0\dot{\mathbf{p}}^T \\ \dot{p}_0\dot{\mathbf{p}} & \dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}} & -\dot{p}_0\dot{\mathbf{p}}^T \\ -\dot{p}_0\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0^2\mathbf{I}_3 + \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}}\mathbf{I}_3 - \dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{b}
$$

となる。ここで式(b)の右辺のマトリックスのうち右下(3×3)のサブマトリックスは、式(2.38)の等式を用いると

$$\dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}}\mathbf{I}_3 - \dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}^T = -\tilde{\dot{\mathbf{p}}}\tilde{\dot{\mathbf{p}}} \tag{c}$$

と書けるから、

$$\dot{p}_0^2\mathbf{I}_3 + \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}}\mathbf{I}_3 - \dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}^T = \dot{p}_0^2\mathbf{I}_3 - \tilde{\dot{\mathbf{p}}}\tilde{\dot{\mathbf{p}}} \tag{d}$$

となる。この結果を式(b)に用いると、式(b)は式(a)と等しいことがわかる。以上により式(6.77)の成立が確認できた。

つぎに $(\dot{\mathbf{E}})^T\dot{\mathbf{E}}$ は

$$
\begin{aligned}
(\dot{\mathbf{E}})^T\dot{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{p}}^T \\ \dot{p}_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}} & -\dot{\mathbf{p}}^T(\dot{p}_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\dot{\mathbf{p}}}) \\ -(\dot{p}_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\dot{\mathbf{p}}})\dot{\mathbf{p}} & (\dot{p}_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\dot{\mathbf{p}}})(\dot{p}_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\dot{\mathbf{p}}}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}^T\dot{\mathbf{p}} & -\dot{p}_0\dot{\mathbf{p}}^T \\ -\dot{p}_0\dot{\mathbf{p}} & \dot{p}_0^2\mathbf{I}_3 - \tilde{\dot{\mathbf{p}}}\tilde{\dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{e}
$$

と書けるから、式(a)の右辺と等しくなり

$$(\dot{\mathbf{E}})^T\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{I}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tag{f}$$

となることが確認できた。これは式(6.79)である。