SL第33回　SL-MBD(1)_6.7_任意ベクトルを伴った分解マトリックスの微分

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第33回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその七回目として任意ベクトルを伴った分解マトリックスの微分について学ぶ。　2022.10.20　清水

6.5.2　任意ベクトルを伴った分解マトリックスの微分

$\mathbf{A}$ が座標変換マトリックスであるとき、任意のベクトル $\mathbf{b}$ との積 $\mathbf{Ab}$ の $\boldsymbol{\varepsilon}$ に関する偏微分は式(6.5a)を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{Ab}) &\underset{(6.5a)}{=} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\left[\left(2p_0^2-1\right)\mathbf{b}+2\mathbf{pp}^T\mathbf{b}+2p_0\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{b}\right]\\ &=2\left[2p_0\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{b}\,,\quad \mathbf{p}^T\mathbf{bI}_3+\mathbf{pb}^T-p_0\tilde{\mathbf{b}}\right]\\ &\underset{(2.38)}{=}2\left[2p_0\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{b},\quad \mathbf{bp}^T-\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{b}}+\mathbf{pb}^T-p_0\tilde{\mathbf{b}}\right]\\ &=2\left[p_0\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{b},\quad -\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{b}}+\mathbf{pb}^T-p_0\tilde{\mathbf{b}}\right]+2\left[p_0\mathbf{b},\quad \mathbf{bp}^T\right]\\ &=2\mathbf{E}\ \mathbf{B}^-+2\mathbf{b}\boldsymbol{\varepsilon}^T\end{aligned}\qquad(6.67)$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{b}\right)=2\mathbf{L}\ \mathbf{B}^+ +2\mathbf{b}\boldsymbol{\varepsilon}^T\qquad(6.68)$$

を得る。式(6.22)を時間微分して

$$\dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{b}+\mathbf{E}^T\dot{\mathbf{b}}=\dot{\mathbf{B}}^+\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{B}^+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

を得る。これに式(6.22)の $\mathbf{b}$ として $\dot{\mathbf{b}}$ を用いたときの関係式 $\mathbf{E}^T\dot{\mathbf{b}}=\dot{\mathbf{B}}^+\boldsymbol{\varepsilon}$ を用いると

$$\dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{b}=\mathbf{B}^+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\qquad(6.69)$$

を得る。同様に式(6.23)より

$$\dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{b}=\mathbf{B}^-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\qquad(6.70)$$

式(6.59)の両辺に右から $\mathbf{b}$ を掛けると

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{b} \underset{(6.59)}{=} 2\mathbf{E}\dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{b} \underset{(6.70)}{=} 2\mathbf{E}\mathbf{B}^-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6.71}$$

さらに $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{b}$ は

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{b} \underset{(6.59)}{=} 2\dot{\mathbf{E}}\mathbf{L}^T\mathbf{b} \underset{(6.23)}{=} 2\dot{\mathbf{E}}\mathbf{B}^-\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.72}$$

と書ける。同様に $\dot{\mathbf{A}}^T\mathbf{b}$ については次式となる。

$$\dot{\mathbf{A}}^T\mathbf{b} = 2\mathbf{L}\mathbf{B}^+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\dot{\mathbf{L}}\mathbf{B}^+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.73}$$