

今回はSL(short lecture)通算第31回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその五回目として角速度とオイラーパラメータの時間微分について学ぶ。 2022.09.08 清水

6.4 角速度とオイラーパラメータの時間微分

角速度とオイラーパラメータの関係を調べる。式(5.17b) より

$$\tilde{\omega}_B^{OB} = (\mathbf{A}^{OB})^T \dot{\mathbf{A}}^{OB} \quad (6.51a)$$

ここで $\tilde{\omega}^{OB} \equiv \tilde{\omega}_O^{OB}$, $\tilde{\omega}^{IOB} \equiv \tilde{\omega}_B^{OB}$ とおき、式(6.51a)を

$$\tilde{\omega}^{IOB} = (\mathbf{A}^{OB})^T \dot{\mathbf{A}}^{OB} \stackrel{(5.16)}{=} (\mathbf{A}^{OB})^T \tilde{\omega}^{OB} \mathbf{A}^{OB} \quad (6.51b)$$

と書く。式(6.51b)の第2式に式(6.13)と後述する式(6.59)を代入すると、角速度の枠 B の成分表示は

$$\tilde{\omega}^{IOB} = (\mathbf{E}^{OB} (\mathbf{L}^{OB})^T)^T \left(2\mathbf{E}^{OB} (\dot{\mathbf{L}}^{OB})^T \right) \stackrel{(6.18),(6.16)}{=} 2\mathbf{L}^{OB} (\dot{\mathbf{L}}^{OB})^T = 2(\mathbf{L}^{OB} \dot{\mathbf{\epsilon}}^{OB})^\sim \quad (6.52)$$

となる。最後の式の変形には後述の[補足6.6]の式(6.63)を用いた(SL第32回目で講義する)。式(6.52)において $\sim$ (チルダ)オペレータをはずすと

$$\omega^{IOB} = 2\mathbf{L}^{OB} \dot{\mathbf{\epsilon}}^{OB} \quad (6.53)$$

または

$$\dot{\mathbf{\epsilon}}^{OB} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}^{OB})^T \omega^{IOB} \quad (6.54)$$

となる。角速度の枠 O の成分表示は、式(5.18)に式(6.13)と式(6.53)および式(6.18)、式(6.57)を逐次代入すると

$$\omega^{OB} = \mathbf{A}^{OB} \omega^{IOB} = 2\mathbf{E}^{OB} (\mathbf{L}^{OB})^T \mathbf{L}^{OB} \dot{\mathbf{\epsilon}}^{OB} = 2\mathbf{E}^{OB} \dot{\mathbf{\epsilon}}^{OB} \quad (6.55)$$

となるから

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{OB} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{OB})^T \boldsymbol{\omega}^{OB} \quad (6.56)$$

となる。

[補足説明6.4.1] 角速度とオイラーパラメータの時間微分との関係・その2

式(6.53)より角速度とオイラーパラメータの時間微分の関係として

$$\boldsymbol{\omega}^{IOB} = 2\mathbf{L}^{OB}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{OB}, \quad \boldsymbol{\Omega} = 2\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (a)$$

および式(6.55)より

$$\boldsymbol{\omega}^{OB} = 2\mathbf{E}^{OB}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{OB}, \quad \boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (b)$$

を得た。

角速度 $\boldsymbol{\omega}^{IOB}$ は連続体力学では物質記述の角速度(または物質量の角速度)と呼ばれ、 $\boldsymbol{\Omega}$ という大文字が使われることが多い。これに対して $\boldsymbol{\omega}^{OB}$ は空間記述の角速度(または空間量の角速度)と呼ばれ、 $\boldsymbol{\omega}$ という小文字が使われる。式(a)と(b)ではこれらの文字を使用した式を右側に示した。同時に、上付き添字 OB を省略した。

これらの式を別の方法で導出してみよう。

(1) 角速度の記述

座標変換マトリックス $\mathbf{A}$ (ショートレクチャー本文では $\mathbf{A}^{OB}$ を用いているが、上付き添字 OB を取っている。その他の文字も同様である)にはつぎの性質がある。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{A} = 1, \quad \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0 \quad (1)$$

式(1)を時間で微分すると

$$\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^T = -(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T)^T \quad (2)$$

を得る。このひずみ対称のテンソル $(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T)$ により空間量の $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ を

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \quad (3)$$

と定義している(SL-18の式(5.17a)参照)。角速度 $\boldsymbol{\omega}$ はこの $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ に対する軸ベクトルとして定義される。

式(SL-27の式(6.1a))より $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T + (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T)\cos\psi + \tilde{\mathbf{n}}\sin\psi \quad (4)$$

と書ける(ただし、ここでは、文字を $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{n}$ 、 $\Theta \rightarrow \psi$ と置き換えている)。これに恒等式 $\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}$ を用いると

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + (\sin\psi)\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\psi)\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \quad (5)$$

と書ける。これより $\mathbf{A}^T$ は

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{I} - (\sin\psi)\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\psi)\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \quad (6)$$

である。 $\dot{\mathbf{A}}$ は式(5)を時間微分して

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\psi}(\cos\psi)\tilde{\mathbf{n}} + (\sin\psi)\dot{\tilde{\mathbf{n}}} + \dot{\psi}(\sin\psi)\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\psi)(\dot{\tilde{\mathbf{n}}}\tilde{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{n}}\dot{\tilde{\mathbf{n}}}) \quad (7)$$

と書ける。

式(3)に式(7)と(6)を代入して、単位ベクトルの時間微分の性質 $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} = 0$ を用いると角速度テンソル $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ は

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\psi}\tilde{\mathbf{n}} + \sin\psi\dot{\tilde{\mathbf{n}}} + (1 - \cos\psi)(\dot{\tilde{\mathbf{n}}}\tilde{\mathbf{n}}) \quad (8)$$

と変形できる。したがって $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ の軸ベクトルである角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\dot{\psi} + \{\sin\psi\mathbf{I} + (1 - \cos\psi)\tilde{\mathbf{n}}\}\dot{\mathbf{n}} \quad (9)$$

と得られる。

つぎに、物質量の $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ を

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \quad (10)$$

と定義する。上で述べたことと同様の手順で

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\psi}\tilde{\mathbf{n}} + \sin\psi\dot{\tilde{\mathbf{n}}} - (1 - \cos\psi)(\dot{\tilde{\mathbf{n}}}\tilde{\mathbf{n}}) \quad (11)$$

を得る。したがってテンソル $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ の軸ベクトルである角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ は

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{n}\dot{\psi} + \{\sin\psi\mathbf{I} - (1 - \cos\psi)\tilde{\mathbf{n}}\}\dot{\mathbf{n}} \quad (12)$$

と書ける。

(2) 角速度とオイラーパラメータの時間微分との関係

オイラーパラメータ $\boldsymbol{\varepsilon}$ はSL-27の式(6.2)と(6.3)より

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3]^T = [p_0 \ \mathbf{p}^T]^T \quad (13)$$

および

$$p_0 = \cos \frac{\Psi}{2}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{n} \sin \frac{\Psi}{2} \quad (14)$$

と書けた。

オイラーパラメータの時間微分 ($\dot{p}_0, \dot{\mathbf{p}}$) と回転軸の時間微分 ($\dot{\psi}, \dot{\mathbf{n}}$) の関係は

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin \frac{\Psi}{2} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\Psi}{2} \mathbf{n} & \sin \frac{\Psi}{2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

とかける。したがって、この式の逆関係は

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} \begin{bmatrix} -2 & \mathbf{0} \\ \text{atan} \frac{\Psi}{2} \mathbf{n} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる。式(9)に式(16)を用いると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= [\mathbf{n} \quad \{\sin \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \tilde{\mathbf{n}}\}] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{n} \quad \{\sin \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \tilde{\mathbf{n}}\}] \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} \begin{bmatrix} -2 & \mathbf{0} \\ \text{atan} \frac{\Psi}{2} \mathbf{n} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} \begin{bmatrix} -2\mathbf{n} + \text{atan} \frac{\Psi}{2} \{\sin \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \tilde{\mathbf{n}}\} \mathbf{n} & \{\sin \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \tilde{\mathbf{n}}\} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} \begin{bmatrix} (-2\mathbf{n} + \text{atan} \frac{\Psi}{2} \sin \psi \mathbf{n}) & \{\sin \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \tilde{\mathbf{n}}\} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= 2 \begin{bmatrix} -\sin \frac{\Psi}{2} \mathbf{n} & (\cos \frac{\Psi}{2} \mathbf{I} + \sin \frac{\Psi}{2} \tilde{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= 2 [-\mathbf{p} \quad p_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}}] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}$$

となる。 $[-\mathbf{p} \quad p_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}}] = \mathbf{E}$ であるから

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (17)$$

となる。これは式(b)と同じであることが確認できる。

同様に、 $\boldsymbol{\Omega}$ は式(12)に式(16)を用いて変形して

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (18)$$

を得る。これは式(a)と同じであることが確認できる。