SL第30回　SL-MBD(1)_6.4_オイラーパラメータによる相対座標変換

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第30回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその四回目としてオイラーパラメータによる相対座標変換について学ぶ。　2022.07.28　清水

6. 3. 2 オイラーパラメータによる相対座標変換

6. 3. 1項で相対座標変換を扱い、枠 j から枠 i への、すなわち枠 i から見た枠 j の座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{ij}$ を得た。ここでは、この変換マトリックス $\mathbf{A}^{ij}$ を表わすオイラーパラメータである

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ij} \equiv \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}^{ij} = \begin{bmatrix} p_0^{ij} & p_1^{ij} & p_2^{ij} & p_3^{ij} \end{bmatrix}^T \tag{6.36}$$

とオイラーパラメータ $\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}$ 、$\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}$ の関係を求める。そのために

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \tag{6.37}$$

とおく。この $\mathbf{a}$ の両辺に $\mathbf{A}^{ij}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{ij}\mathbf{a} &\equiv \mathbf{A}^{ij}\mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = (\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}\mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \underset{(6.13)}{=} (\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{E}^{Oj}(\mathbf{L}^{Oj})^T\mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \\
&\underset{(6.39)}{=} -(\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{E}^{Oj}(\mathbf{L}^{Oj})^T\mathbf{L}^{Oj}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} = -\mathbf{L}^{Oi}(\mathbf{E}^{Oi})^T\mathbf{E}^{Oj}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \\
&\underset{(6.40)}{=} \mathbf{L}^{Oi}(\mathbf{E}^{Oi})^T\mathbf{E}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

となる。ただし[補足6. 3]の式(6. 39)、(6. 40)を利用した。これよりベクトル $\mathbf{a}$ は $\mathbf{A}^{ij}$ の固有ベクトルであることがわかる。したがって、ベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ は枠 i と枠 j の共通の回転姿勢軸上になければならない。

［補足6. 3］ 次式が成り立つ。

$$\cdot\ \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = -\mathbf{L}^{Oj}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \tag{6.39}$$

$$\cdot\ \mathbf{E}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = -\mathbf{E}^{Oj}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \tag{6.40}$$

$$\cdot\ \mathbf{A}^{ij}\mathbf{L}^{Oi} = -(\mathbf{A}^{Oj})^T \mathbf{E}^{Oi} \tag{6.41}$$

◇

オイラーパラメータの性質から、式(6. 37)で定義したベクトル$\mathbf{a}$の幾何ベクトル$\vec{\mathbf{a}}$はベクトル$\vec{\mathbf{p}}$と平行になる($\vec{\mathbf{a}}$は枠iと枠jの共通の回転軸上にあり、$\vec{\mathbf{p}}$もこの回転軸上にある)。ベクトル$\vec{\mathbf{a}}$の大きさを見るために$(p_0^{ij})^2 + \mathbf{a}^T\mathbf{a}$を計算する。$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij}$に対して式(6. 6)と[補足6. 4]の式(6. 48)より

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij} = 4(p_0^{ij})^2 - 1 = 4\{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 - 1 \tag{6.42}$$

が成り立つから

$$(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} = (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = p_0^{ij} \tag{6.43}$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned}(p_0^{ij})^2 + \mathbf{a}^T\mathbf{a} &\underset{(6.37)}{=} \{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 + (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T(\mathbf{L}^{Oi})^T\mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \\ &= \{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 + (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\{\mathbf{I}_4 - \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi})^T\}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \\ &= \{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 + (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} - \{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 \\ &= 1\end{aligned} \tag{6.44}$$

となる。式(6. 44)と式(6. 38)の性質より、$\mathbf{a} = \mathbf{p}^{ij} = \begin{bmatrix} p_1^{ij} & p_2^{ij} & p_3^{ij}\end{bmatrix}^T$となることがわかる。したがって式(6. 37)より

$$\mathbf{p}^{ij} = \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \tag{6.45}$$

となる。よって枠jから枠iへの変換マトリックス$\mathbf{A}^{ij}$を記述するオイラーパラメータ$\boldsymbol{\varepsilon}^{ij}$は

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ij} \equiv \begin{bmatrix} p_0^{ij} \\ \mathbf{p}^{ij}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi})^T \\ \mathbf{L}^{Oi}\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = \mathbf{K}^{iO}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ij} = \mathbf{K}^{iO}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \tag{6.46}$$

となる。ただし

$$\mathbf{K}^{iO} \equiv \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi})^T \\ \mathbf{L}^{Oi} \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

である。

［補足6.4］次式が成り立つ。

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij} = 4\{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 - 1 \tag{6.48}$$

これは$\mathbf{A}^{ij} = (\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{A}^{Oj}$を用いて$\mathbf{A}^{Oi}$、$\mathbf{A}^{Oj}$を式(6.5a)によりオイラーパラメータ$\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}$、$\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}$で表し、直接掛け算して$\mathbf{A}^{ij}$の対角要素を求め、$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij}$を計算することにより確認できる。

◇

［補足6.5］次式が成り立つ。

$$\mathbf{K}^{iO}(\mathbf{K}^{iO})^T = \mathbf{I}_4 \tag{6.49}$$

すなわち$\mathbf{K}^{iO}$は直交マトリックス

$$(\mathbf{K}^{iO})^T = (\mathbf{K}^{iO})^{-1} \tag{6.50}$$

である。これは式(6.49)に式(6.47)を代入し、式(6.4)、式(6.16)、式(6.17)の性質を用いることにより確認できる。 ◇

[補足説明6.3_3]　式(6.38)の導出の確認

(1) 式(6.38)の右辺の第2行目の式

$$(\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{E}^{Oj} (\mathbf{L}^{Oj})^T \mathbf{L}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} = \mathbf{L}^{Oi} (\mathbf{E}^{Oi})^T \mathbf{E}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \tag{a}$$

を確認すると

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{E}^{Oj} (\mathbf{L}^{Oj})^T \mathbf{L}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} &\underset{(6.18)}{=} (\mathbf{E}^{Oi} (\mathbf{L}^{Oi})^T)^T \mathbf{E}^{Oj} \{\mathbf{I}_4 - \boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \\ &= (\mathbf{E}^{Oi} (\mathbf{L}^{Oi})^T)^T \mathbf{E}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} - (\mathbf{E}^{Oi} (\mathbf{L}^{Oi})^T)^T \underbrace{\mathbf{E}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}}_{=0} (\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} \\ &= (\mathbf{E}^{Oi} (\mathbf{L}^{Oi})^T)^T \mathbf{E}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} = \mathbf{L}^{Oi} (\mathbf{E}^{Oi})^T \mathbf{E}^{Oj} \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\end{aligned} \tag{b}$$

となり、確認できた。

(2) 式(6.38)の右辺の第3行目の式

$$\mathbf{L}^{Oi}(\mathbf{E}^{Oi})^T\mathbf{E}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} \tag{c}$$

を確認すると

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{Oi}(\mathbf{E}^{Oi})^T\mathbf{E}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} &\underset{(6.18)}{=} \mathbf{L}^{Oi}\{\mathbf{I}_4 - \boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi})^T\}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}\\ &= \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} - \underbrace{\mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}}_{=0}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} = \mathbf{L}^{Oi}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}\end{aligned} \tag{d}$$

となり、確認できた。

[補足説明6.3_4]　式(6.48)の導出の確認

次式を確認する。

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij} = 4\{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 - 1 \tag{6.48}$$

これは $\mathbf{A}^{ij} = (\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj}$ を用いて $\mathbf{A}^{Oi}$ 、$\mathbf{A}^{Oj}$ を式(6.5a)によりオイラーパラメータ $\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}$ 、$\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj}$ で表し、直接掛け算して $\mathbf{A}^{ij}$ の対角要素を求め、$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij}$ を計算することにより確認できる。以下に具体的な計算を進める。まず、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi} &= [p_0 \ \ \mathbf{p}]\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{Oj} &= [q_0 \ \ \mathbf{q}]\end{aligned} \tag{e}$$

とおく。すると

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{ij} &\underset{(6.29)}{=} (\mathbf{A}^{Oi})^T\mathbf{A}^{Oj} \underset{(6.5a)}{=} [\underbrace{(2p_0^2-1)}_{=a}\mathbf{I}_3 + 2(\mathbf{p}\mathbf{p}^T + p_0\tilde{\mathbf{p}})]^T\\ &\qquad\qquad\cdot[\underbrace{(2q_0^2-1)}_{=b}\mathbf{I}_3 + 2(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}})]\\ &= [a\mathbf{I}_3 + 2(\mathbf{p}\mathbf{p}^T - p_0\tilde{\mathbf{p}})][b\mathbf{I}_3 + 2(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}})]\\ &= ab\mathbf{I}_3 + 2a(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}}) + 2b(\mathbf{p}\mathbf{p}^T - p_0\tilde{\mathbf{p}})\\ &\quad + 4(\mathbf{p}\mathbf{p}^T - p_0\tilde{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}})\end{aligned} \tag{f}$$

最終式の右辺第1項のトレースを計算すると

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[ab\mathbf{I}_3 + 2a(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}}) + 2b(\mathbf{p}\mathbf{p}^T - p_0\tilde{\mathbf{p}})]\\ &= 3ab + 2a\mathbf{q}^T\mathbf{q} + 2b\mathbf{p}^T\mathbf{p}\\ &= 3ab + 2a(1-q_0^2) + 2b(1-p_0^2) = 4{p_0}^2{q_0}^2 - 1\end{aligned} \tag{g}$$

となる。右辺第2項のトレースを計算すると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[4(\mathbf{p}\mathbf{p}^T - p_0\tilde{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}})] \\
&= 4\,\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} p_1^2 & p_1p_2 + p_0p_3 & p_1p_3 - p_0p_2 \\ p_2p_1 - p_0p_3 & p_2^2 & p_2p_3 + p_0p_1 \\ p_3p_1 + p_0p_2 & p_3p_2 - p_0p_1 & p_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1^2 & q_1q_2 - q_0q_3 & q_1q_3 + q_0q_2 \\ q_2q_1 + q_0q_3 & q_2^2 & q_2q_3 - q_0q_1 \\ q_3q_1 - q_0q_2 & q_3q_2 + q_0q_1 & q_3^2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 4[(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 + 2p_0q_0(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)]
\end{aligned}
\tag{h}
$$

となる。以上より $\mathbf{A}^{ij}$ のトレース $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{ij} &= 4{p_0}^2{q_0}^2 - 1 + 4[(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 + 2p_0q_0(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)] \\
&= 4[{p_0}^2{q_0}^2 + (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 + 2p_0q_0(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)] - 1 \\
&= 4[(p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)]^2 - 1 \\
&= 4\{(\boldsymbol{\varepsilon}^{Oj})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{Oi}\}^2 - 1
\end{aligned}
\tag{i}
$$

と計算される。これにより式(6.48)が確認できた。