

今回はSL(short lecture)通算第29回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその三回目としてオイラーパラメータに関して複数の基準枠と相対姿勢について学ぶ。 2022.07.07 清水

6.3 複数の基準枠と相対姿勢

6.3.1 相対姿勢と座標変換

図6.1に示すように原点を共有する三つの枠（全体枠 $O-xyz$ 、基準枠 $i-x_i y_i z_i$ 、基準枠 $j-x_j y_j z_j$ ）を考える。枠 $O-xyz$ から見た枠 $i-x_i y_i z_i$ 、枠 $j-x_j y_j z_j$ の回転変換の関係に加えて、枠 $i-x_i y_i z_i$ から見た枠 $j-x_j y_j z_j$ の回転変換の関係が必要なことがしばしば起こる。この関係を求めるために原点から発するベクトル \vec{s} を考えよう。このベクトルの各枠での成分表示を

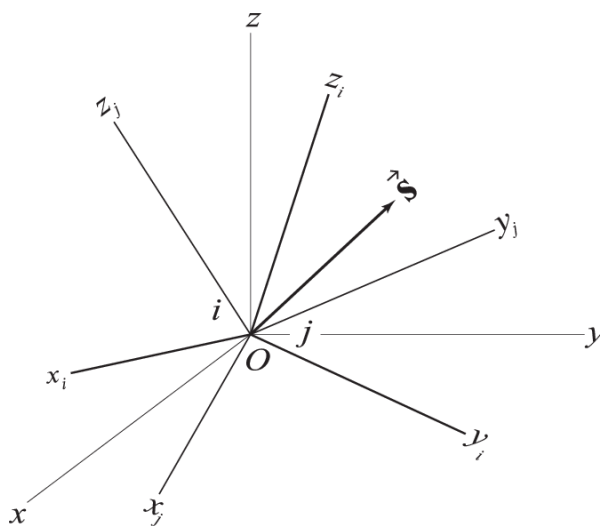


図6.1 三つの基準枠による
ベクトル \vec{s} の表現

$$\vec{s} = \mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{s}_0 = \mathbf{e}^{(i)T} \mathbf{s}'_i = \mathbf{e}^{(j)T} \mathbf{s}'_j \quad (6.26)$$

と書くことにする。これらの成分表示と座標(回転)変換マトリックスの関係は

$$\mathbf{s}'_i = (\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{s}_0, \quad \mathbf{s}_0 = \mathbf{A}^{Oj} \mathbf{s}'_j \quad (6.27)$$

と書ける。したがって

$$\mathbf{s}'_i = (\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{A}^{Oj} \mathbf{s}'_j = \mathbf{A}^{ij} \mathbf{s}'_j \quad (6.28)$$

となる。ここで \mathbf{A}^{ij} は

$$\mathbf{A}^{ij} \equiv (\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{A}^{Oj} \quad (6.29)$$

で定義される。このマトリックスは、枠 j から枠 i への(相対)座標変換マトリックスであり、枠 i から見た枠 j の回転姿勢を表す回転変換マトリックスである。

このマトリックスには

$$(\mathbf{A}^{ij})^T \mathbf{A}^{ij} = (\mathbf{A}^{Oj})^T \mathbf{A}^{Oi} (\mathbf{A}^{Oi})^T \mathbf{A}^{Oj} = (\mathbf{A}^{Oj})^T \mathbf{A}^{Oj} = \mathbf{I}_3 \quad (6.30)$$

という関係があるから、直交マトリックスである。

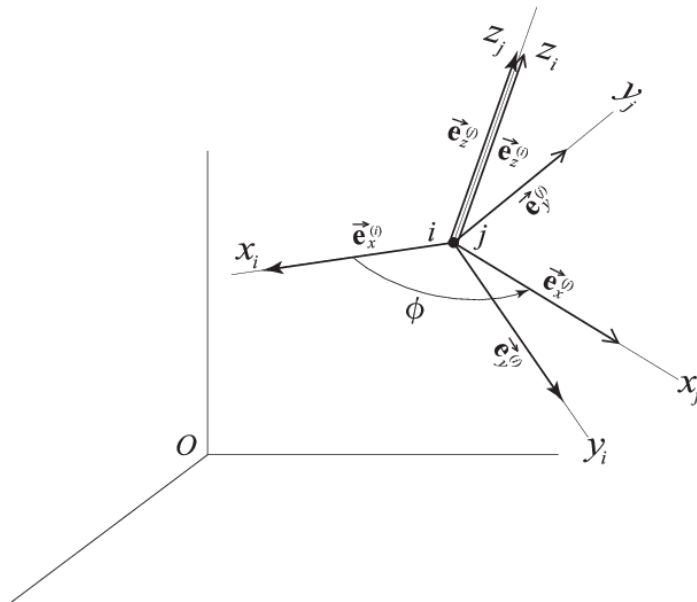


図6.2 軸 z_i と軸 z_j とが平行な場合の相対回転

[例題6.1] z_i 軸と z_j 軸が平行な場合の相対回転

図6.2は枠 $i-x_i y_i z_i$ が z_i 軸を回転軸として反時計まわりに角度 ϕ だけ回転して枠 $j-x_j y_j z_j$ になったときの状態である。 z_i 軸と z_j 軸は平行である。方向余弦の性質より $\vec{e}_x^{(i)} \cdot \vec{e}_x^{(j)} = \cos\phi$ となる。これを全体枠 O の成分表示で表わすと

$$\mathbf{e}_x^{iT} \mathbf{e}_x^j = \cos\phi \quad (6.31)$$

また、外積の定義 $\vec{e}_x^{(i)} \times \vec{e}_x^{(j)} = \vec{e}_z^{(i)} \sin\phi$ より

$$\tilde{\mathbf{e}}_x^i \mathbf{e}_x^j = \mathbf{e}_z^i \sin\phi \quad (6.32)$$

となる。式(6.32)の両辺に左から \mathbf{e}_z^{iT} を作用させると、 $\tilde{\mathbf{e}}_x^i = -\tilde{\mathbf{e}}_x^i$ を用いて

$$\sin\phi = \mathbf{e}_z^{iT} \tilde{\mathbf{e}}_x^i \mathbf{e}_x^j = (\tilde{\mathbf{e}}_x^{iT} \mathbf{e}_z^i)^T \mathbf{e}_x^j = -(\tilde{\mathbf{e}}_x^i \mathbf{e}_z^i)^T \mathbf{e}_x^j = \mathbf{e}_y^{iT} \mathbf{e}_x^j \quad (6.33)$$

を得る。式(6.31)、式(6.33)を各ベクトルが固定されている枠の成分表示で表すと

$$\cos\phi = (\mathbf{e}_x^{iI})^T (\mathbf{A}^{Oi})^T (\mathbf{A}^{Oj} \mathbf{e}_x^{jJ}) = (\mathbf{e}_x^{iI})^T \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}_x^{jJ} \quad (6.34)$$

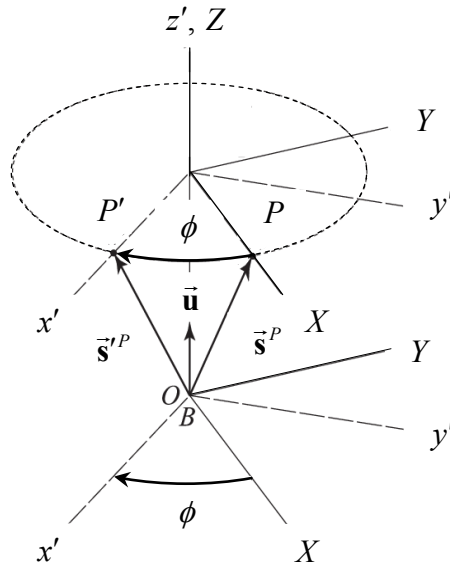
$$\sin\phi = (\mathbf{e}_y^{iI})^T (\mathbf{A}^{Oi})^T (\mathbf{A}^{Oj} \mathbf{e}_x^{jJ}) = (\mathbf{e}_y^{iI})^T \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}_x^{jJ} \quad (6.35)$$

となる。これらより ϕ が求められる。

[補足説明6.3_2] オイラーパラメータの物理的な意味と半回転座標系⁽¹⁾

オイラーパラメータの物理的な解釈は単純であり、オイラー角やブライアント角などの他の回転座標の組よりも実装が自然である。

ある座標系の他の座標系に対する回転姿勢は、オイラーの定理によって、回転姿勢軸まわりの回転角 ϕ による単一回転の結果と見みなすことができる。補足図6.1はベクトル \vec{s}^P を回転軸 \vec{u} まわりに回転角 ϕ だけ回転させたときに得られたベクトル \vec{s}'^P を示している。このときの回転の正方向は(回転軸の先端から見たとき)時計まわりであると約束する。この場合に、座標変換マトリックスを \mathbf{A} とす



補足図6.1 回転軸 \vec{u} まわりの回転角 ϕ の回転
(時計まわりを正回転とする)

ると

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{A}\mathbf{s}'^P \quad (\text{a})$$

と表される。

一般に、観測者はいろいろな方法で回転を観察する。ここでは三つのケースを検討する。

ケース1：観測者が全体枠 xyz において観測する場合

初期に全体枠 xyz と一致する物体枠 $x'y'z'$ が回転角 ϕ だけ回転したとする。このとき、正の回転は、観測者によって回転軸 \vec{u} まわりの枠 $x'y'z'$ の時計まわりの回転とみなされる。・・・補足図6.2(a)と補足図6.3(a)

ケース2：観測者が物体枠 $x'y'z'$ において観測する場合

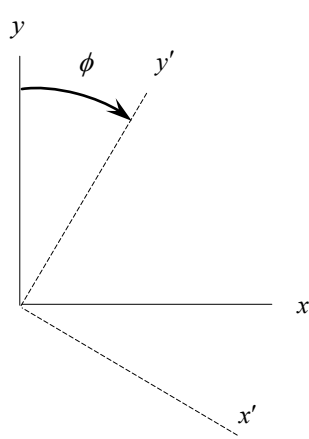
このときは、回転は回転軸 \vec{u} まわりの回転角 ϕ による枠 xyz の反時計まわりの回転とみなされる。・・・補足図6.2(b)と補足図6.3(b)

ケース3：観測者が半回転座標系 $\alpha\beta\gamma$ において観測する場合

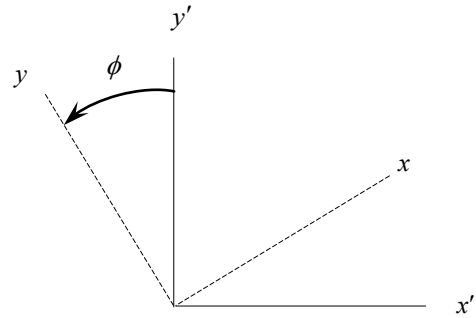
このときは、同じ回転が回転軸 \vec{u} まわりの回転角 $\phi/2$ による枠 $x'y'z'$ の時計ま

わりの回転と、回転角 $\phi/2$ による枠 xyz の反時計まわりの回転が同時に行われるとみなされる。・・・補足図6.2(c)と補足図6.3(c)

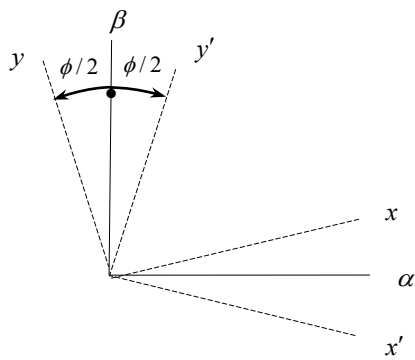
これら三つの場合を平面運動に対して補足図6.2(a)-(c)に、空間運動に対して補足図6.3(a)-(c)に示した。



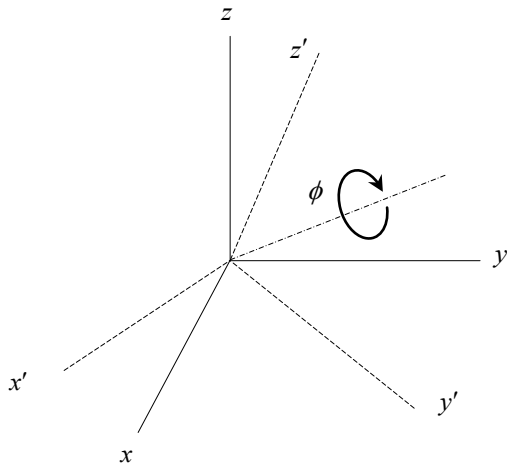
補足図6.2(a) xyz 軸に対して、 z 軸の時計まわりに ϕ だけ回転した $x'y'z'$ 軸 (2次元)



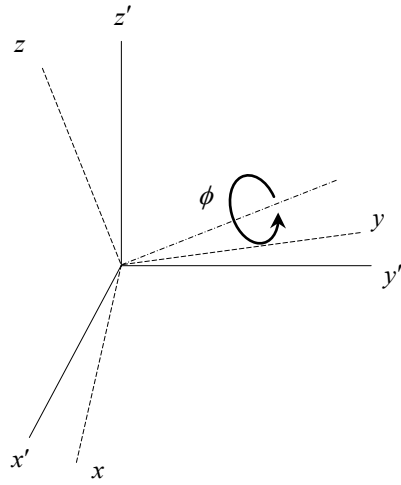
補足図6.2(b) $x'y'z'$ 軸に対して、 z' 軸の反時計まわりに ϕ だけ回転した xyz 軸 (2次元)



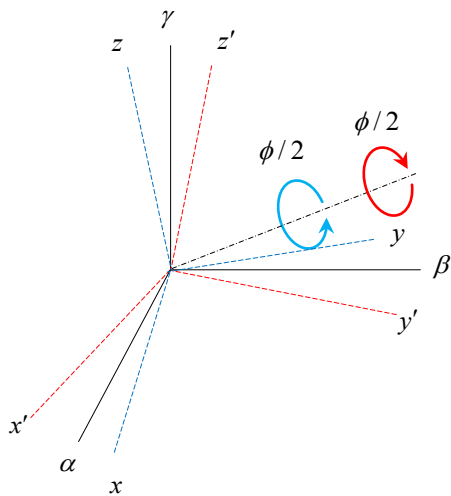
補足図6.2(c) $\alpha\beta\gamma$ 軸に対して、時計まわりに $\phi/2$ だけ回転した $x'y'z'$ 軸と反時計まわりに $\phi/2$ だけ同時に回転した xyz 軸 (2次元)



補足図6.3(a) xyz 軸に対して、回転軸の時計まわりに ϕ だけ回転した $x'y'z'$ 軸 (3次元)



補足図6.3(b) $x'y'z'$ 軸に対して、回転軸の反時計まわりに ϕ だけ回転した xyz 軸 (3次元)



補足図6.3(c) $\alpha\beta\gamma$ 軸に対して、回転軸の時計まわりに $\phi/2$ だけ回転した $x'y'z'$ 軸と反時計まわりに $\phi/2$ だけ同時に回転した xyz 軸 (3次元)

式(6.13)によれば、座標変換マトリックス \mathbf{A} は二つの相つぐ座標変換の結果であることが分かる。すなわち \mathbf{A} は 3×4 の二つのマトリックス \mathbf{E} と \mathbf{L} により

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{L}^T \quad (6.13)$$

と書けた。ここで \mathbf{E} と \mathbf{L} はともに (3×4) のマトリックスで、それぞれ

$$\mathbf{E} \equiv [-\mathbf{p} \quad p_0 \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}}] = \begin{bmatrix} -p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}, \quad (3 \times 4) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{L} \equiv [-\mathbf{p} \quad p_0 \mathbf{I}_3 - \tilde{\mathbf{p}}] = \begin{bmatrix} -p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}, \quad (3 \times 4) \quad (6.15)$$

と表された。 p_0, p_1, p_2, p_3 はオイラーパラメータである。

空間内のベクトル $\underline{\mathbf{s}}$ は $x'y'z'$ 座標系から xyz 座標系に次式で変換される。既述の式(a)は

$$\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{A} \mathbf{s}' \quad (\text{a})$$

と書けた。ただし、ここでは \mathbf{s}^P を \mathbf{s} 、 \mathbf{s}'^P を \mathbf{s}' と書いた。

この変換はつぎの二つのステップにより順次行うことができる。

$$\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{L}^T \mathbf{s}' \quad (\text{b1})$$

$$\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{E} \mathbf{s} \quad (\text{b2})$$

ここで、 $\mathbf{L} \mathbf{L}^T = \mathbf{I}_3$ が成り立つから、式(b1)より

$$\mathbf{s}' = \mathbf{L} \underline{\mathbf{s}} \quad (\text{b3})$$

が成り立つ。仲介役の $\underline{\mathbf{s}}$ は4次元空間のベクトルである。マトリックス \mathbf{L}^T は、まず3次元空間のベクトル \mathbf{s}' を $x'y'z'$ 座標系から、(3次元空間の半回転 $\alpha\beta\gamma$ 座標系ではなく) 4次元空間の半回転座標系へ変換している。この変換された4次元のベクトル $\underline{\mathbf{s}}$ は、マトリックス \mathbf{E} を介した第二回目の半回転によって、4次元空間の半回転座標系から3次元空間の xyz 座標系のベクトル \mathbf{s} に変換される。

変換マトリックス \mathbf{E} と \mathbf{L} は、オイラーパラメーターに関して線形である。この \mathbf{E} と \mathbf{L} の線形性は、局所座標系と全体座標系間の座標変換を4次元の半回転座標系を介して行う、という事実によるものであり、もし、半回転座標系を3次元空間内で定義すると、対応する半回転変換マトリックスは回転座標に関して非線形となる。

参考文献

- (1) Parviz E. Nikravesh, Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, p. 176-177.

[補足例題6.1] 補足図6.1に示す回転軸が一定姿勢を保つ回転の問題を考え、上で述べた式を具体的に確認しよう。

そのため、点 P と P' の座標をそれぞれ $P(1, 0, \sqrt{3}/2)$, $P'(1/2, -\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ とする。したがって $\mathbf{s}^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{s}'^P = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^T$ である。ベクトル \mathbf{s}'^P は \mathbf{s}^P を回転軸の時計回りに $\phi = \pi/3$ だけ回転したベクトルである。回転変換マトリックス \mathbf{A} は $\phi = \pi/3$ であるから ($\cos \phi = 1/2$, $\sin \phi = \sqrt{3}/2$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{tr } \mathbf{A} = 2 \quad (\text{c})$$

となる。オイラーパラメータを座標変換マトリックスから求めると

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \frac{\text{tr } \mathbf{A} + 1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} && \rightarrow p_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_1^2 &= \frac{1 + 2a_{11} - \text{tr } \mathbf{A}}{4} = \frac{1 + 2 \times \frac{1}{2} - 2}{4} = 0 && \rightarrow p_1 = 0 \\ p_2^2 &= \frac{1 + 2a_{22} - \text{tr } \mathbf{A}}{4} = \frac{1 + 2 \times \frac{1}{2} - 2}{4} = 0 && \rightarrow p_2 = 0 \\ p_3^2 &= \frac{1 + 2a_{33} - \text{tr } \mathbf{A}}{4} = \frac{1 + 2 \times 1 - 2}{4} = \frac{1}{4} && \rightarrow p_3 = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{d1})$$

プラスの符号をとると

$$p_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\phi}{2}, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\phi}{2} \quad (\text{d2})$$

と得られる。

\mathbf{L}^T と \mathbf{E} は

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}^T \\ p_0 \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{e})$$

および

$$\mathbf{E} = [-\mathbf{p} \quad p_0 \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}}] = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (\text{f})$$

である。 \mathbf{L} と \mathbf{E} はその成分が ϕ の半回転角 $\phi/2$ の関数で表されることが分かる。式

(b1)より $\mathbf{s}'^P = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ と $\boldsymbol{\varepsilon} = [p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ を考慮して

$$\underline{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}^T \\ p_0 \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \mathbf{s}'^P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad (\text{g})$$

を得る。式(b2)より

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{E} \underline{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (\text{h})$$

となる。すなわち式(b1)と式(b2)を順次半回転変換することにより \mathbf{s}'^P から \mathbf{s}^P が得られることが確認できた。