SL第27回　SL-MBD(1)_6.1_6章オイラーパラメータの定義と座標変換マトリックス

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第27回目。6章のオイラーパラメータによる姿勢表現の内容を九回にわたって講義している。今回はその一回目としてオイラーパラメータの定義と座標変換マトリックスについて学ぶ。　2022.05.19　清水

6. オイラーパラメータによる姿勢表現

角速度は物体の回転運動を記述するのに便利であるが、これはノンホロノミックな量であり、時間で積分して対応する角変位量を求めることができない。オイラーパラメータはこの不便さを回避するために考え出された。オイラーパラメータは四つの変数で自由度3の運動を表現するので余剰変数があるが、ホロノミックな量であるから積分が可能である。本章ではオイラーパラメータの定義とその性質について学ぶ。

6.1 オイラーパラメータの定義と座標変換マトリックス

4.3節において、回転軸 $\vec{\mathbf{u}}$ まわりに任意のベクトル $\vec{\mathbf{b}}$ を Θ だけ回転させる座標変換マトリックスは、基準枠 $\left\{O,\mathbf{e}^{(O)}\right\}$ に対して成分表示により

$$\mathbf{A}^{OB}=\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{T}+\left(\mathbf{I}_3-\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{T}\right)\cos\Theta+\tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \qquad (6.1a)$$

または

$$\mathbf{A}^{OB}=\mathbf{I}_3+2\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}\sin^2\frac{\Theta}{2}+\tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \qquad (6.1b)$$

と書いた。

この式をオイラーパラメータ $\boldsymbol{\varepsilon}^{OB}$ (式(6.2))により書き換える。以下の説明では、簡単にするために $\mathbf{A}^{OB}$ や $\boldsymbol{\varepsilon}^{OB}$ の添え字を省略し、$\mathbf{A}$ や $\boldsymbol{\varepsilon}$ と書く(必要なときにはいつでも添え字を復活させる)。

オイラーパラメータ(Euler parameters)は、列マトリックスを用いて

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_0 & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T \tag{6.2}$$

と書ける。ここで四つの成分はつぎのように定義され、これにより回転姿勢を表す。

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \cos\frac{\Theta}{2} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{u}\sin\frac{\Theta}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

　オイラーパラメータは、自由度3の空間姿勢を四つの変数で表わしているために、独立ではなくつぎの正規化の条件がある。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon} = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{6.4}$$

$\mathbf{A}$ は式(6. 1a)または(6. 1b)より

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}^T\right)\cos\Theta + \tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \\ &= \cos\Theta\mathbf{I}_3 + (1-\cos\Theta)\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \\ &= (2\cos^2\frac{\Theta}{2} - 1)\mathbf{I}_3 + 2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\tilde{\mathbf{u}}\right) \end{aligned}$$

または

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{u}}\sin\frac{\Theta}{2}\left(\cos\frac{\Theta}{2}\mathbf{I}_3 + \sin\frac{\Theta}{2}\tilde{\mathbf{u}}\right)$$

となるからオイラーパラメータを用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(2p_0^2 - 1\right)\mathbf{I}_3 + 2\left(\mathbf{p}\mathbf{p}^T + p_0\tilde{\mathbf{p}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2\left(p_0^2 + p_1^2\right) - 1 & 2\left(p_1p_2 - p_0p_3\right) & 2\left(p_1p_3 + p_0p_2\right) \\ 2\left(p_1p_2 + p_0p_3\right) & 2\left(p_0^2 + p_2^2\right) - 1 & 2\left(p_2p_3 - p_0p_1\right) \\ 2\left(p_1p_3 - p_0p_2\right) & 2\left(p_2p_3 + p_0p_1\right) & 2\left(p_0^2 + p_3^2\right) - 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.5a}$$

または

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{p}}\left(p_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1-2\left(p_2^2+p_3^2\right) & 2\left(p_1p_2-p_0p_3\right) & 2\left(p_1p_3+p_0p_2\right) \\ 2\left(p_1p_2+p_0p_3\right) & 1-2\left(p_1^2+p_3^2\right) & 2\left(p_2p_3-p_0p_1\right) \\ 2\left(p_1p_3-p_0p_2\right) & 2\left(p_2p_3+p_0p_1\right) & 1-2\left(p_1^2+p_2^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.5b}
$$

と書ける。

つぎに座標変換マトリックスとオイラーパラメータの関係を見てみよう。座標変換マトリックス $\mathbf{A}$ とオイラーパラメータ $p_0, \mathbf{p}$ には

$$
\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = 4p_0^2 - 1 \tag{6.6}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&p_1^2 = \frac{1}{4}\left(1+2a_{11}-\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\right),\ p_2^2 = \frac{1}{4}\left(1+2a_{22}-\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\right), \\
&p_3^2 = \frac{1}{4}\left(1+2a_{33}-\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\right)
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.7}
$$

$$
\mathbf{A} - \mathbf{A}^T = 4p_0\tilde{\mathbf{p}} \tag{6.8}
$$

$$
\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = 2\left(2p_0^2 - 1\right)\mathbf{I}_3 + 4\mathbf{p}\mathbf{p}^T \tag{6.9}
$$

などの関係がある。これらの式により、座標変換マトリックスの要素からオイラーパラメータを計算することができる。

［補足6.1］　次の公式が成り立つ。

$$
\mathbf{p}^T\mathbf{e}^{(O)} = \mathbf{p}^T\mathbf{e}^{(B)} \tag{6.10}
$$

$$
\tilde{\mathbf{p}}\left(\mathbf{e}^{(O)} + \mathbf{e}^{(B)}\right) = p_0\left(\mathbf{e}^{(O)} - \mathbf{e}^{(B)}\right) \tag{6.11}
$$

$$
\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p} \tag{6.12}
$$