SL第26回　SL-MBD(1)_5.10_5章角速度・速度と角加速度・加速度

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第26回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその十回目として加速度について学ぶ。　2022.04.28　清水

5.5 加速度

点 P の加速度を求めるには式(5.43)を枠 O に対して時間で1回微分する。

$$\frac{{}^{O}d}{dt}\left({}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}\right)=\frac{{}^{O}d}{dt}\left({}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B}\right)+\frac{{}^{O}d}{dt}\left({}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}\right)+\frac{{}^{O}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right) \tag{5.65}$$

枠 O 内での速度と枠 B 内での速度の時間微分、すなわち加速度を

$${}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{P}=\frac{{}^{O}d}{dt}\left({}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{P}\right)\quad,\quad {}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{B}=\frac{{}^{O}d}{dt}\left({}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{B}\right)\quad,\quad {}^{B}\vec{\mathbf{a}}^{P}=\frac{{}^{B}d}{dt}\left({}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}\right) \tag{5.66}$$

と書く。式(5.65)の右辺第2項、第3項に輸送則の式(5.36)を適用して

$$\frac{{}^{O}d}{dt}\left({}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}\right)=\frac{{}^{B}d}{dt}\left({}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}\right)+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times{}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}={}^{B}\vec{\mathbf{a}}^{P}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times{}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}\frac{{}^{O}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right)&=\frac{{}^{B}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right)+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right)\\&=\left(\frac{{}^{B}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\right)\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\frac{{}^{B}d}{dt}\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right)\\&={}^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times{}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}+\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right)\end{aligned} \tag{5.68}$$

式(5.65)に式(5.66)～式(5.68)を用いると

$${}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{P}={}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{B}+{}^{B}\vec{\mathbf{a}}^{P}+2\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times{}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\right) \tag{5.69}$$

を得る。なお $\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}$ は次式でわかるとおり、$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}\equiv{}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}={}^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}$ となる角速度ベクトルである。すなわち

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}={}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}\equiv\frac{{}^{O}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\right)=\frac{{}^{B}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\right)+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}=\frac{{}^{B}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\right)={}^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}$$

となる。${}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{P}$ と ${}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{B}$ は点 P 、点 B の枠 O に対する加速度、$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ は移動枠の回転角加速度による加速度、$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ は点 P の向心加速度である。${}^{B}\vec{\mathbf{a}}^{P}$ は枠 B 内の観測者から見た加速度である。 $2\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times{}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ はコリオリ(Coliolis)の加速度と呼ばれ、 ${}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ の方向変化と $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ における $\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ の大きさの変化の和である。

もし図5.4において、点 P が剛体 B 上に固定されているとすると(図4.2参照)

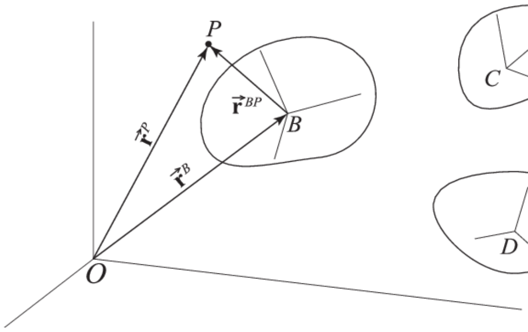


図5.4　点 P の位置ベクトルと
複数の枠 (再掲)

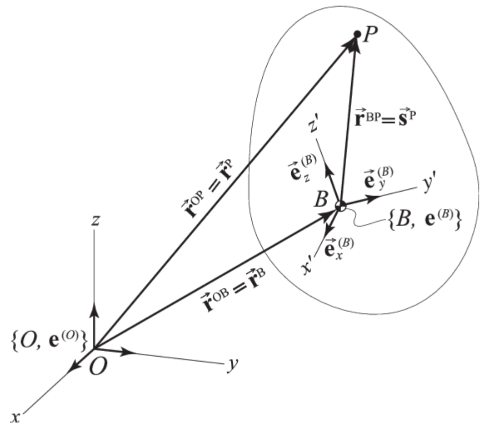


図4.2　物体上の点 P の
位置(再掲)

$$
{}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}=\mathbf{0}\quad,\qquad {}^{B}\vec{\mathbf{a}}^{P}=\mathbf{0} \tag{5.70}
$$

であるから式(5.69)は

$$
{}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{P}={}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{B}+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}\times\vec{\mathbf{s}}^{P}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{s}}^{P} \tag{5.71}
$$

となる。ただし $\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ を $\vec{\mathbf{s}}^{P}$ と書いた。

$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}$ を枠 O と枠 B の成分で表示すると

$$
\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}=\mathbf{e}^{(O)T}\boldsymbol{\alpha}^{OB}=\mathbf{e}^{(B)T}\boldsymbol{\alpha}'^{OB} \tag{5.72}
$$

これより

$$
\boldsymbol{\alpha}^{OB}=\mathbf{e}^{(O)}\cdot\mathbf{e}^{(B)T}\boldsymbol{\alpha}'^{OB}\underset{(4.6b)}{=}\mathbf{e}^{(O)}\cdot\mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\alpha}'^{OB}\underset{(2.24)}{=}\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\alpha}'^{OB} \tag{5.73}
$$

となる。ここで、式(5.66)および式(5.68)を枠Oおよび枠Bの成分で分解する。

加速度は

$$
\begin{aligned}
&{}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{P} = \mathbf{e}^{(O)T}\,{}^{O}\mathbf{a}^{P} \quad , \quad {}^{O}\vec{\mathbf{a}}^{B} = \mathbf{e}^{(O)T}\,{}^{O}\mathbf{a}^{B} \\
&{}^{B}\vec{\mathbf{a}}^{P} = \mathbf{e}^{(B)T}\,{}^{B}\mathbf{a}'^{P} \quad = \quad \mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{A}^{OB}\,{}^{B}\mathbf{a}'^{P}
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

となり、コリオリの加速度は

$$
\begin{aligned}
&2\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times {}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} \underset{(5.47)}{=} 2\mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\,{}^{B}\mathbf{v}'^{P} \\
&\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB} \times \vec{\mathbf{r}}^{BP} \underset{(5.47)}{=} \mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'^{OB}\mathbf{r}'^{BP}
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

となる。また、向心加速度は

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \mathbf{r}^{BP} &= \left(\boldsymbol{\omega}'^{OB}\right)^{T}\mathbf{e}^{(B)} \times \left(\boldsymbol{\omega}'^{OB}\right)^{T}\mathbf{e}^{(B)} \times \mathbf{e}^{(B)^{T}}\mathbf{r}'^{BP} \\
&\underset{(2.29)}{=} \left(\boldsymbol{\omega}'^{OB}\right)^{T}\mathbf{e}^{(B)} \times \mathbf{e}^{(B)^{T}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\mathbf{r}'^{BP} \\
&\underset{(2.29)}{=} \mathbf{e}^{(B)T}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\mathbf{r}'^{BP} \\
&\underset{(4.6b)}{=} \mathbf{e}^{(O)T}\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\mathbf{r}'^{BP}
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

となるから、式(5.69)は

$$
{}^{O}\mathbf{a}^{P} = {}^{O}\mathbf{a}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\left({}^{B}\mathbf{a}'^{P} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\,{}^{B}\mathbf{v}'^{P} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'^{OB}\mathbf{r}'^{BP} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\mathbf{r}'^{BP}\right) \tag{5.77}
$$

となり、式(5.71)は

$$
\begin{aligned}
{}^{O}\mathbf{a}^{P} &= {}^{O}\mathbf{a}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'^{OB}\mathbf{s}'^{P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\mathbf{s}'^{P}\right) \\
&= {}^{O}\mathbf{a}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'^{OB} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}\right)\mathbf{s}'^{P}
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

となる。ただし$\mathbf{r}'^{BP}$を$\mathbf{s}'^{P}$と書いた。

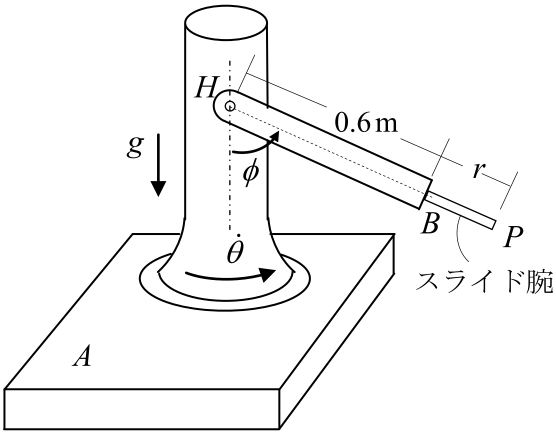
[補足説明5.5_1]　ロボットアームの角加速度と加速度

(H.Baruhの本の p.130-132を参照にした)

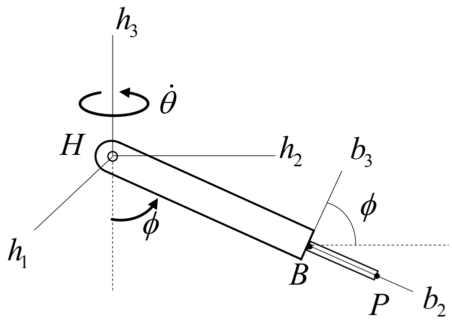
補足図5.2のロボットアームのモデルを考える。これは回転する垂直に自立する軸に取り付けられたロボットアームである。第一のアームHBは垂直の軸に回転ジョイントで連結されている。第二のアームは並進ジョイントにより第一のアームに結合され、第一

のアームに対して平行にスライドする。

軸は回転角 $\theta(t)=0.2t$[rad] で運動する。これに対して第一アームは $\phi(t)=(\pi/4)(1+\sin\pi t)$ [rad]、第二アームは $r(t)=3t$ [cm] の相対運動をする。



補足図5. 2 ロボットアームのモデル



補足図5. 3 二つの相対枠の定義

このとき、ロボットアームの角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}$ と角加速度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}$ および頂点 P の速度 ${}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ と加速度 ${}^{A}\vec{\mathbf{a}}^{P}$ を求めてみよう。

軸中心の点を H とし、回転する第一アームの先端の点を B とする。これらの点に二つの枠 H と枠 B を補足図5. 3のように設置する。枠 H は回転軸に固定されている。枠 B を第一アームの点 B に取り付け、第二アームがスライドする方向を b_2 軸方向と一致させる。なお枠 A は全体固定枠(静止枠)であり、その原点 A は回転軸の中心と基部の交点の基部上にあるものとする。

まず、角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH}$ と $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB}$ はつぎのようになる。

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH}=\dot{\theta}\vec{\mathbf{h}}_3=0.2\vec{\mathbf{h}}_3\ \ \mathrm{rad/s},\ \ \vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB}=\dot{\phi}\vec{\mathbf{h}}_1=\frac{\pi^2}{4}\cos\pi t\vec{\mathbf{h}}_1\ \ \mathrm{rad/s} \qquad \text{(a)}$$

ただし $\vec{\mathbf{h}}_1,\vec{\mathbf{h}}_2,\vec{\mathbf{h}}_3$ は枠 H の h_1,h_2,h_3 軸の基底ベクトルである。さらに枠 B の b_1,b_2,b_3 軸の基底ベクトルを $\vec{\mathbf{b}}_1,\vec{\mathbf{b}}_2,\vec{\mathbf{b}}_3$ とおく。

点 P の枠 B に対する相対変位 $\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ と相対速度 ${}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ および点 P の枠 H に対する相対変位 $\vec{\mathbf{r}}^{HP}$ はつぎのようになる。

$$\vec{\mathbf{r}}^{BP} = 0.03t\,\vec{\mathbf{b}}_2 \ \ \text{m}, \quad {}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} = 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 \ \ \text{m/s} \tag{b1}$$

$$\vec{\mathbf{r}}^{HP} = (0.6 + 0.03t)\vec{\mathbf{b}}_2 \ \ \text{m} \tag{b2}$$

枠 B と枠 H の基底ベクトルの間の関係は

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{b}}_1 \\ \vec{\mathbf{b}}_2 \\ \vec{\mathbf{b}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90-\phi) & -\sin(90-\phi) \\ 0 & \sin(90-\phi) & \cos(90-\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{h}}_1 \\ \vec{\mathbf{h}}_2 \\ \vec{\mathbf{h}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{h}}_1 \\ \vec{\mathbf{h}}_2 \\ \vec{\mathbf{h}}_3 \end{bmatrix} \tag{c1}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{h}}_1 \\ \vec{\mathbf{h}}_2 \\ \vec{\mathbf{h}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \\ 0 & -\cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{b}}_1 \\ \vec{\mathbf{b}}_2 \\ \vec{\mathbf{b}}_3 \end{bmatrix} \tag{c2}$$

である。なお、これはベクトリックス $\mathbf{e}^{(B)} \equiv [\vec{\mathbf{b}}_1 \ \vec{\mathbf{b}}_2 \ \vec{\mathbf{b}}_3]^T, \mathbf{e}^{(H)} \equiv [\vec{\mathbf{h}}_1 \ \vec{\mathbf{h}}_2 \ \vec{\mathbf{h}}_3]^T$ と基本回転マトリックス $\mathbf{R}_x(\phi)$ を用いて $\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{e}^{(H)}$ および $\mathbf{e}^{(H)} = \mathbf{R}_x^T(\phi)\mathbf{e}^{(B)}$ と書ける。

式(c2)を用いて

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB} = \dot{\phi}\vec{\mathbf{h}}_1 = \dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1 \tag{d1}$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH} = \dot{\theta}\vec{\mathbf{h}}_3 = -\dot{\theta}\cos\phi\vec{\mathbf{b}}_2 + \dot{\theta}\sin\phi\vec{\mathbf{b}}_3 \tag{d2}$$

と書ける。さらに

$${}^{H}\vec{\mathbf{v}}^{B} = 0.6\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 \ \ \text{m/s} \tag{e1}$$

$${}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} = 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 \ \ \text{m/s} \tag{e2}$$

である。ここで、あとで使う $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB} \times \vec{\mathbf{r}}^{BP}$ を計算すると

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB} \times \vec{\mathbf{r}}^{BP} = \dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1 \times 0.03t\,\vec{\mathbf{b}}_2 = 0.03t\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 \ \ \text{m/s} \tag{f}$$

枠 H に対する点 P の速度 ${}^{H}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ は枠 H に対する枠 B の相対速度を用いて

$$\begin{aligned} {}^{H}\vec{\mathbf{v}}^{P} &= {}^{H}\vec{\mathbf{v}}^{B} + {}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB} \times \vec{\mathbf{r}}^{BP} = 0.6\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 + 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 + 0.03t\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 \\ &= 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 + (0.6 + 0.03t)\dot{\phi}\,\vec{\mathbf{b}}_3 \ \ \text{m/s} \end{aligned} \tag{g}$$

と書ける。

先端の点 P の枠 A に対する速度 ${}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ は

$$ {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{P} = {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{H} + {}^{H}\vec{\mathbf{v}}^{P} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH} \times \vec{\mathbf{r}}^{HP} \tag{h} $$

と書ける。ここで

$$ {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{H} = \mathbf{0} \tag{i1} $$

$$ \begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH} \times \vec{\mathbf{r}}^{HP} &= (-\dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2 + \dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3) \times (0.6 + 0.03t)\vec{\mathbf{b}}_2 \\ &= -(0.6 + 0.03t)\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1 \quad \text{m/s} \end{aligned} \tag{i2} $$

であるから式(h)に(g)、(i1)および(i2)を用いて次式を得る。

$$ \begin{aligned} {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{P} &= {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{H} + {}^{H}\vec{\mathbf{v}}^{P} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH} \times \vec{\mathbf{r}}^{HP} \\ &= \mathbf{0} + 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 + (0.6 + 0.03t)\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 - (0.6 + 0.03t)\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1 \\ &= -(0.6 + 0.03t)\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1 + 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 + (0.6 + 0.03t)\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 \quad \text{m/s} \end{aligned} \tag{j} $$

ここまでの計算では、枠 H と枠 B の二つの枠を利用して定式化してきた。以下では、一つの枠 B を用いて定式化する。枠 B はロボットの第一アームに固定された物体固定枠である。枠 A に対する枠 B の動きを考える。

枠 A に対する枠 B の角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}$ は

$$ \begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB} &= \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB} = \dot{\theta}\vec{\mathbf{h}}_3 + \dot{\phi}\vec{\mathbf{h}}_1 = \dot{\theta}(-\cos\phi\vec{\mathbf{b}}_2 + \sin\phi\vec{\mathbf{b}}_3) + \dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1 \\ &= \dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1 - \dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2 + \dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3 \end{aligned} \tag{k} $$

となる。先端 P の速度 ${}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{P}$ を枠 B を基に記述すると

$$ {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{P} = {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{B} + {}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB} \times \vec{\mathbf{r}}^{BP} \tag{l} $$

となる。ここで

$$ \begin{aligned} {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{B} &= \frac{{}^{A}d\vec{\mathbf{r}}^{AH}}{dt} + \frac{{}^{A}d\vec{\mathbf{r}}^{HB}}{dt} = \frac{{}^{A}d\vec{\mathbf{r}}^{HB}}{dt} \quad \leftarrow \quad \frac{{}^{A}d\vec{\mathbf{r}}^{AH}}{dt} = 0 \quad \because \vec{\mathbf{r}}^{AH} \text{ は時間不変} \\ &= \frac{{}^{B}d\vec{\mathbf{r}}^{HB}}{dt} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB} \times \vec{\mathbf{r}}^{HB} \quad \leftarrow \quad \frac{{}^{B}d\vec{\mathbf{r}}^{HB}}{dt} = 0 \quad \because \vec{\mathbf{r}}^{HB} \text{ は枠 } B \text{ 上の不変ベクトル} \\ &= \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB} \times \vec{\mathbf{r}}^{HB} \end{aligned} \tag{m} $$

と書ける。以上より

$$ \begin{aligned} {}^{A}\vec{\mathbf{v}}^{B} &= \vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB} \times \vec{\mathbf{r}}^{HB} = (\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1 - \dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2 + \dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3) \times 0.6\vec{\mathbf{b}}_2 \\ &= -0.6\dot{\theta}\sin\phi\vec{\mathbf{b}}_1 + 0.6\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3 \quad \text{m/s} \end{aligned} \tag{n1} $$

$$ {}^{B}\vec{\mathbf{v}}^{P} = 0.03\vec{\mathbf{b}}_2 \quad \text{m/s} \tag{n2} $$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}=(\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1-\dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3)\times 0.03t\vec{\mathbf{b}}_2$$
$$=-0.03t\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1+0.03t\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3\quad\mathrm{m/s}\tag{n3}$$

となる。

加速度 ${}^A\vec{\mathbf{a}}^P$ を求める。まず、枠 A に対する枠 B の角加速度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}$ は

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AH}+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{HB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB}\tag{o}$$

と書ける。ここで、

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AH}=\mathbf{0},\quad \vec{\boldsymbol{\alpha}}^{HB}=\ddot{\phi}(t)\,\vec{\mathbf{h}}_1=-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t\,\vec{\mathbf{h}}_1\quad\mathrm{m/s^2}\tag{p1}$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AH}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{HB}=\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{h}}_3\times\dot{\phi}\,\vec{\mathbf{h}}_1=\dot{\theta}\dot{\phi}\,\vec{\mathbf{h}}_2=0.05\pi^2\cos\pi t\,\vec{\mathbf{h}}_2\quad\mathrm{m/s^2}\tag{p2}$$

であるから、枠 A に対する枠 B の角加速度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}$ は

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}&=-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t\,\vec{\mathbf{h}}_1+0.05\pi^2\cos\pi t\,\vec{\mathbf{h}}_2\\&=(-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t)\vec{\mathbf{b}}_1+(0.05\pi^2\cos\pi t)(\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3)\\&=-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t\,\vec{\mathbf{b}}_1+(0.05\pi^2\cos\pi t)\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+(0.05\pi^2\cos\pi t)\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3\quad\mathrm{m/s^2}\end{aligned}\tag{q}$$

となる。

加速度 ${}^A\vec{\mathbf{a}}^P$ は

$${}^A\vec{\mathbf{a}}^P={}^A\vec{\mathbf{a}}^B+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+2\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times{}^B\vec{\mathbf{v}}^P+{}^B\vec{\mathbf{a}}^P\tag{r}$$

ここで ${}^B\vec{\mathbf{v}}^P=0.03\vec{\mathbf{b}}_2$ m/s であるから ${}^B\vec{\mathbf{a}}^P=\mathbf{0}$ である。

点 B の加速度 ${}^A\vec{\mathbf{a}}^B$ は

$${}^A\vec{\mathbf{a}}^B=\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HB}\tag{s}$$

であるから、式(r)の右辺の最初の三つの項は式(s)を用いて

$$\begin{aligned}&{}^A\vec{\mathbf{a}}^B+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\\&=\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HB}+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}\\&=\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times(\vec{\mathbf{r}}^{HB}+\vec{\mathbf{r}}^{BP})+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times(\vec{\mathbf{r}}^{HB}+\vec{\mathbf{r}}^{BP})\\&=\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HP}\end{aligned}\tag{t}$$

式(t)の最終式の右辺の二つの項と式(r)の右辺第四項を評価して、これらの和を取ると

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HP}=(-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t\,\vec{\mathbf{b}}_1+(0.05\pi^2\cos\pi t)\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+(0.05\pi^2\cos\pi t)\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3)$$
$$\times(0.6+0.03t)\vec{\mathbf{b}}_2$$
$$=(0.6+0.03t)[-(0.05\pi^2\cos\pi t)\cos\phi\vec{\mathbf{b}}_1-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t\vec{\mathbf{b}}_3]\quad \mathrm{m/s^2}$$

(u1)

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{HP}=(\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1-\dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3)\times(\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1-\dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3)$$
$$\times(0.6+0.03t)\vec{\mathbf{b}}_2$$
$$=(0.6+0.03t)[-\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\vec{\mathbf{b}}_1-(\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\phi)\vec{\mathbf{b}}_2-\dot{\theta}^2\cos\phi\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3]\quad \mathrm{m/s^2}$$

(u2)

$$2\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times{}^B\vec{\mathbf{v}}^P=2(\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_1-\dot{\theta}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_2+\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3)\times0.03\vec{\mathbf{b}}_2$$
$$=-0.06\dot{\theta}\sin\phi\vec{\mathbf{b}}_1+0.06\dot{\phi}\vec{\mathbf{b}}_3\quad \mathrm{m/s^2}$$
(u3)

の計算を経て、点 P の加速度 ${}^A\vec{\mathbf{a}}^P$ は

$$\begin{aligned}
{}^A\vec{\mathbf{a}}^P &= {}^A\vec{\mathbf{a}}^B+\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times\vec{\mathbf{r}}^{BP}+2\vec{\boldsymbol{\omega}}^{AB}\times{}^B\vec{\mathbf{v}}^P\\
&=(0.6+0.03t)[-(0.05\pi^2\cos\pi t)\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1-\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t\,\vec{\mathbf{b}}_3]\\
&\quad+(0.6+0.03t)[-\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1-(\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\phi)\vec{\mathbf{b}}_2-\dot{\theta}^2\cos\phi\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_3]\\
&\quad-0.06\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{\mathbf{b}}_1+0.06\dot{\phi}\,\vec{\mathbf{b}}_3\\
&=-\left[(0.6+0.03t)(0.05\pi^2\cos\pi t\cos\phi+\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi)+0.06\dot{\theta}\sin\phi\right]\vec{\mathbf{b}}_1\\
&\quad-\left[(0.6+0.03t)(\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\phi)\right]\vec{\mathbf{b}}_2\\
&\quad+\left[-(0.6+0.03t)(\frac{\pi^3}{4}\sin\pi t+\dot{\theta}^2\cos\phi\sin\phi)+0.06\dot{\phi}\right]\vec{\mathbf{b}}_3\quad \mathrm{m/s^2}
\end{aligned}\tag{v}$$

となる。

参考文献

H. Baruh, Analytical Dynamics,WCB/McGraw-Hill, 1999.