SL第25回　SL-MBD(1)_5.9_5章速度と加速度-角加速度

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第25回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその九回目として角加速度について学ぶ。　2022.04.14　清水

5.4 角加速度

図5.4を考える。角加速度は角速度の時間微分として定義される。任意の基準枠 D で角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}$ を時間微分したときの角加速度を

$$
{}^{D}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OC}=\frac{{}^{D}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC} \tag{5.63}
$$

により定義する。角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}$ を慣性枠 O 内で微分した式(5.63)の定義に基づく角加速度 ${}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OC}$ は、輸送則の式(5.36)を用いて

$$
\begin{aligned}
{}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OC}&=\frac{{}^{O}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}\right)\underset{(5.21)}{=}\frac{{}^{O}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}+\frac{{}^{O}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\\
&\underset{(5.36)}{=}{}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}+\left(\frac{{}^{B}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\right)\\
&={}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}+{}^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{BC}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}
\end{aligned} \tag{5.64}
$$

を得る。

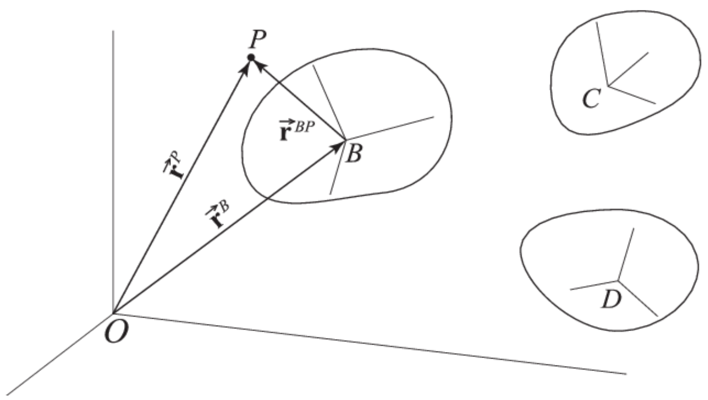


図5.4　点 P の位置ベクトルと複数の枠 (再掲)

[補足説明5.4_1]　式(5.64)の意味

式(5.64)を再度、下記のように書こう。

$$ {}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OC} \equiv \frac{{}^{O}d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}\right) \underset{(5.21)}{=} \frac{{}^{O}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} + \frac{{}^{O}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} \tag{5.64a} $$

$$ \underset{(5.36)}{=} {}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB} + \left(\frac{{}^{B}d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\right) \tag{5.64b} $$

$$ = {}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB} + {}^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{BC} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} \tag{5.64c} $$

第一式の(5.64a)は角速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}$ が式(5.25)より $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}$ と書けるから、両辺を全体枠 O の時間で微分した式である。角速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}$ 、$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ および $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}$ は、それぞれ、枠 O から見た枠 C (物体 C)の角速度、枠 O から見た枠 B (物体 B)の角速度および枠 B から見た枠 C (物体 C)の角速度(相対角速度)である。

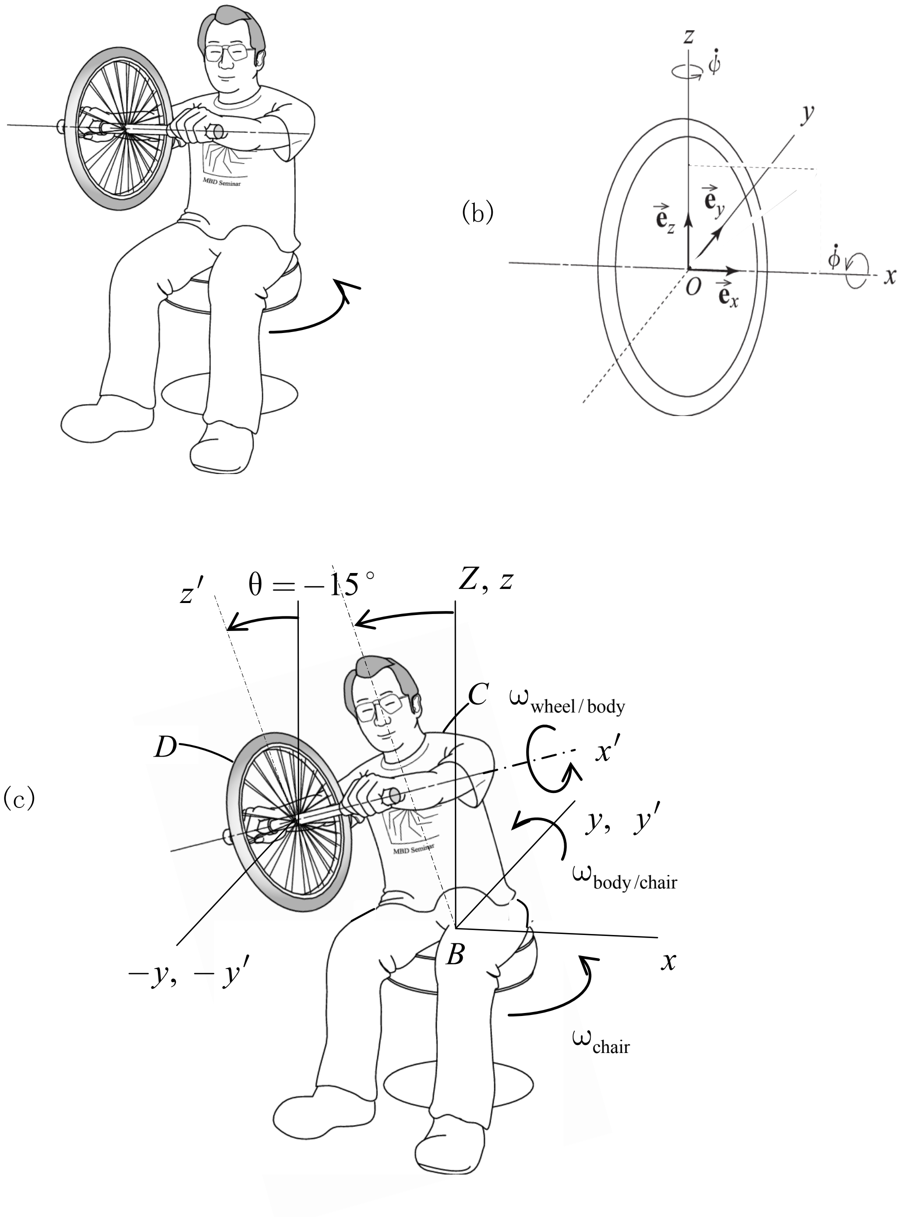
第二式(5.64b)において第一項の ${}^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}$ は枠 O から見た枠 B (物体 B)の角加速度、第二項の( )で示される $\left({}^{B}d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}/dt + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\right)$ は式(5.64a)の右辺の最後の項 ${}^{O}d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}/dt$ (枠 B に対する枠 C (物体 C)の角速度の枠 O での時間微分)を枠 B を基準として表したもので、ベクトル $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}$ の枠 B 上での時間微分 ${}^{B}d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}/dt \equiv {}^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{BC}$ (すなわち角加速度)と枠 O に対する枠 B の角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ に対する角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}$ の効果(輸送項) $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}$ を加えた角加速度である。この式(5.64b)は結局、式(5.64c)となる。

[補足説明5.4_2]　自転車の車輪の角加速度

SL-MBD(1)_5.3_5章速度と加速度-角速度3の[補足説明5.1_1]では自転車の車輪の角速度を扱った。同じ問題に対して角加速度を計算してみよう。

補足図5.1(a)は人が自由に回転できる椅子に座って、回転する車輪の軸を軸受を介してつかんでいる様子である。車輪は一定回転速度 $\dot{\phi}$ （ $\dot{\phi} = 4\,\mathrm{rad/s}$ ）で回転しているとする。このときの座標系と基底ベクトルを図(b)に示す。車軸の右方向を x 軸にとり、上方向を z 軸として、全体枠の Z 軸と一致させている。右手系で決る残りの座標軸が y 軸である。この図では y 軸は手前から奥の方向が正である。

(a) (b) (c)



補足図5.1 車輪の角速度(再掲)

ある与えられた瞬間に椅子(本文の図5.4と対応させて考えるために、これを物体Bとしよう)の回転角速度$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\rm chair}\ (=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB})$は$Z=z$軸の正方向に$\dot{\psi}$ rad/sで与えられているとする。すなわち

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\rm chair} = \dot{\psi}\,\vec{\mathbf{e}}_z = \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_Z \qquad \text{(a)}$$

である。ただし$\vec{\mathbf{e}}_Z$は全体枠OのZ軸の基底ベクトルである(全体枠の原点Oの位

置は椅子と床面の接触点と Z 軸の交点とする)。

図(c)は、この人がつぎに体の中心線を z 軸から $-y$ 軸回りに $\dot{\theta}$ rad/sで傾け、傾き角が $\theta=-15^\circ$ になった瞬間の状態を示している。このとき体(図5.4の物体 C としよう)は剛体運動をするとし、車軸にも同様の運動が伝わるとする。椅子に対する人の相対角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{body/chair}}\,(=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC})$ は

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{body/chair}}=-\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}'_y=-\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_y \tag{b}$$

と書ける。車輪(図5.4の物体 D としよう)の回転角速度(物体 C に対する物体 D の角速度)は $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{wheel/body}}$ と表わされ

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{wheel/body}}=\dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x \tag{c}$$

と書ける。以上より車輪の角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}\ (=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OD})$ は式(5.25)の性質を利用して

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}=\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{chair}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{body/chair}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{wheel/body}}=\dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z+(-\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y+\dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x \tag{d}$$

と書ける。図示した瞬間では xyz 座標系の基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_y,\vec{\mathbf{e}}_z$ と $x'y'z'$ 座標系の基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}'_x,\vec{\mathbf{e}}'_y,\vec{\mathbf{e}}'_z$ の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}'_x\\ \vec{\mathbf{e}}'_y\\ \vec{\mathbf{e}}'_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\ \vec{\mathbf{e}}_y\\ \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\ \vec{\mathbf{e}}_y\\ \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}'_x\\ \vec{\mathbf{e}}'_y\\ \vec{\mathbf{e}}'_z\end{bmatrix} \tag{e}$$

式(d)の各角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{chair}}(=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB})$、$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{body/chair}}(=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC})$ および $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{wheel/body}}(=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD})$ に対して基準とする枠を、明確にするために、対応する角速度をつぎの式で矢印の右のように

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}=\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{chair}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{body/chair}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{wheel/body}}\quad\rightarrow\quad\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OD}=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD} \tag{f}$$

と置き直す。この式の各項の時間微分より以下の式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{{}^O d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OD}&=\frac{{}^O d}{dt}(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD})={}^O\vec{\alpha}^{OB}+\frac{{}^O d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}+\frac{{}^O d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}\\ \frac{{}^O d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}&=\frac{{}^B d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}={}^B\vec{\alpha}^{BC}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\\ \frac{{}^O d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}&=\frac{{}^C d}{dt}\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}={}^C\vec{\alpha}^{CD}+(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC})\times\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}\end{aligned} \tag{g}$$

ここで式(5.63)の定義により ${}^O d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}/dt\equiv{}^O\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB}$ 、 ${}^B d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}/dt\equiv{}^B\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{BC}$ 、${}^C d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}/dt$ $\equiv{}^C\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{CD}$ と置いている。

車輪の全体枠に対する回転角加速度 ${}^O\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OD}\equiv{}^O d\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OD}/dt$ は

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z, \quad \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} = (-\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y, \quad \vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD} = \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x$$

$$^{O}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{OB} = \ddot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z, \quad ^{B}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{BC} = (-\ddot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y, \quad ^{C}\vec{\boldsymbol{\alpha}}^{CD} = \ddot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x$$

を用いて式(g)より

$$\begin{aligned} {}^{O}\vec{\alpha}^{OD} &= \frac{^{O}d}{dt}(\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD}) \\ &= {}^{O}\vec{\alpha}^{OB} + {}^{B}\vec{\alpha}^{BC} + {}^{C}\vec{\alpha}^{CD} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}^{CD} \\ &= \ddot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z - \ddot{\theta}\vec{\mathbf{e}}'_y + \ddot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x + \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z \times (-\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y + \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z \times \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x + (-\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y \times \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x \end{aligned} \tag{h}$$

となる。ここで $\vec{\mathbf{e}}_z = (-\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}'_x + (\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}'_z$ の関係式を用いると

$$\begin{aligned} {}^{O}\vec{\alpha}^{OD} &= \ddot{\psi}[(-\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}'_x + (\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}'_z] - \ddot{\theta}\vec{\mathbf{e}}'_y + \ddot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x + \dot{\psi}[(-\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}'_x + (\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}'_z] \times (-\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y \\ &\quad + \dot{\psi}[(-\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}'_x + (\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}'_z] \times \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x + (-\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y \times \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x \\ &= (-\ddot{\psi}\sin\theta + \ddot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}'_x + (\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta - \ddot{\theta})\vec{\mathbf{e}}'_y + (\ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\phi})\vec{\mathbf{e}}'_z \end{aligned} \tag{i}$$

を得る。同じ ${}^{O}\vec{\alpha}^{OD}$ を $\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$ で表わすと

$$\begin{aligned} {}^{O}\vec{\alpha}^{OD} &= \begin{bmatrix} -\ddot{\psi}\sin\theta + \ddot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta - \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\phi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x \\ \vec{\mathbf{e}}_y \\ \vec{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} \\ &= [(-\ddot{\psi}\sin\theta + \ddot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\cos\theta + (\ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\phi})\sin\theta]\vec{\mathbf{e}}_x \\ &\quad + (\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta - \ddot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_y \\ &\quad + [-(-\ddot{\psi}\sin\theta + \ddot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\sin\theta + (\ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\phi})\cos\theta]\vec{\mathbf{e}}_z \\ &= (\ddot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}_x - (\ddot{\theta} - \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}_y + (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \tag{j}$$

となる。ここで $\dot{\phi} = 4\,\mathrm{rad/s}$ 、 $\ddot{\phi} = 0$ 、 $\theta = 15^\circ$ を代入すると $\sin 15^\circ = 0.2588$, $\cos 15^\circ = 0.9659$ であるから

$$^{O}\vec{\alpha}^{OD} = (\dot{\psi}\dot{\theta} + 1.03520\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_x - (\ddot{\theta} - 3.8636\dot{\psi})\vec{\mathbf{e}}_y + (\ddot{\psi} + 3.8636\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_z \tag{k}$$

となる。さらに、椅子が $\dot{\psi} = 2\,\mathrm{rad/s}$ の一定の回転速度で回転するとした場合には、$\ddot{\psi} = 0$ を考慮して

$$^{O}\vec{\alpha}^{OD} = (3.03520\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_x - (\ddot{\theta} - 7.7272)\vec{\mathbf{e}}_y + (3.8636\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_z \tag{l}$$

となり、さらに $\dot{\theta} = 0.2\,\mathrm{rad/s} = 一定$ の場合には ${}^{O}\vec{\alpha}^{OD}$ は $\ddot{\theta} = 0$ を考慮して

$$^{O}\vec{\alpha}^{OD} = 0.607\vec{\mathbf{e}}_x + 7.73\vec{\mathbf{e}}_y + 0.773\vec{\mathbf{e}}_z \quad [\mathrm{rad/s^2}] \tag{m}$$

となる。