SL第24回　SL-MBD(1)_5.8_5章速度と加速度-回転角の時間微分3

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第24回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその八回目として角速度と回転角の時間微分のうちブライヤント角の時間微分について学ぶ。　2022.03.31 清水

5.3.3 ブライヤント角の時間微分

回転角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ の軸 $1 \to 2 \to 3$ の回転変換後の最終枠 B の成分表示 $\boldsymbol{\omega}'^{OB}$ と、ブライアント角 $\boldsymbol{\theta}_B = [\psi \;\; \theta \;\; \phi]^T$ の時間微分 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_B$ との間には

$$\boldsymbol{\omega}'^{OB} = \mathbf{G}'_B \dot{\boldsymbol{\theta}}_B \tag{5.60}$$

の関係がある。ここで $\mathbf{G}'_B$ は

$$\mathbf{G}'_B = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

となる。$(\mathbf{G}'_B)^{-1}$ は

$$(\mathbf{G}'_B)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & 0 \\ -\cos\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & c\theta \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

となる。$\theta = \pi/2 + n\pi \;\; (n = 0, \pm 1, \cdots)$ に近づくと数値的困難を生ずる。

[復習5.3_3]　オイラー角のシークエンスの再掲

オイラー角のシークエンス(順番)には、実用的か否かは別として、12組の回転軸の組み合わせのシークエンスがある。これらはつぎの2つのグループに分けられる。

・固有オイラー角シークエンスのグループ

$3 \to 1 \to 3$,　$1 \to 2 \to 1$,　$2 \to 3 \to 2$,　$3 \to 2 \to 3$,　$1 \to 3 \to 1$,　$2 \to 1 \to 2$

・タイト・ブライアン角シークエンスのグループ

$1 \to 2 \to 3,\quad 2 \to 3 \to 1,\quad 3 \to 1 \to 2,\quad 1 \to 3 \to 2,\quad 3 \to 2 \to 1,\quad 2 \to 1 \to 3$

狭い呼び方として、$3 \to 1 \to 3$ を古典的なオイラー角(シークエンス)、$3 \to 2 \to 1$ をタイト・ブライアン角(シークエンス)と呼んでいる。タイト・ブライアン角はまたカルダン角、NASA Standard Airplane (Baruh*)などとも呼ばれている。

$3(\psi) \to 2(\theta) \to 3(\phi)$ はNASA Standard Aerospaceと呼ばれている(Baruh*)。この $3(\psi) \to 2(\theta) \to 3(\phi)$ の場合にはベクトリックス $\mathbf{e}^{(B)}$ と $\mathbf{e}^{(O)}$ の関係は基本回転マトリックスを用いて(SL第15回参照)

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}_z(\phi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\,\mathbf{R}_z(\psi)\,\mathbf{e}^{(O)} = \mathbf{R}\mathbf{e}^{(O)} \tag{a}$$

となる。したがって座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{OB} &= \mathbf{R}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\theta\sin\psi + \sin\phi\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{b}$$

このとき ψ は歳差角(precession angle)、θ は章動角(nutation angle)、ϕ はスピン角(spin angle)である。なおこれらの文字は、SL第15回の4.4.2の(a)で定義した文字とは異なっているので注意して欲しい。

* H. Baruh, Analytical Dynamics, WCB/Mc Graw-Hill, 1999, p.419.