

今回はSL(short lecture)通算第22回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその六回目として角速度と回転角の時間微分のうちオイラー角の時間微分について学ぶ。 2022.02.03 清水

5.3 角速度と回転角の時間微分

回転姿勢の角度による表現を4.4節で扱った。本節では角速度と回転角の時間微分の関係調べる。

5.3.1 オイラー角の時間微分

図4.6に示したように、 $\vec{e}_z^{(0)}$ 軸回りの角速度は $\dot{\phi}$ 、 $\vec{e}_x^{(0')}$ 軸回りの角速度は $\dot{\theta}$ 、 $\vec{e}_z^{(0'')}$ 軸回りの角速度は $\dot{\psi}$ である。これらの角度の変換が軸 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ の順序で行われると、まず枠 O の軸 $3(z)$ 方向の $\dot{\phi}$ は $\mathbf{R}_x(\theta)$ により変換され、これに枠 O' の軸 $1(x)$ 方向の $\dot{\theta}$ が加えられ、さらにこれが $\mathbf{R}_z(\psi)$ により変換され、これに枠 $O''(= \text{枠} B)$ の軸 $3(z)$ 方向の $\dot{\psi}$ が加えられる。これにより角速度の最終枠の成分表示が与えられるから角速度ベクトルを

$$\vec{\omega}^{OB} = \mathbf{e}^{(B)T} \boldsymbol{\omega}'^{OB}, \quad \boldsymbol{\omega}'^{OB} \equiv [\omega'_x \ \omega'_y \ \omega'_z]^T \quad (5.50)$$

と書くと(式(5.7)参照)

$$\begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi) \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.51)$$

となる。ただし $\mathbf{R}_x(\theta)$ は式(4.46)のマトリックス、 $\mathbf{R}_z(\psi)$ は式(4.47)で θ を ψ と置き換えたマトリックスである。式(5.51)を整理すると

$$\begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.52a)$$

となる。マトリックス表示では

$$\boldsymbol{\omega}^{IOB} = \mathbf{G}'_E \dot{\boldsymbol{\theta}}_E \quad (5.52b)$$

となる。ここで $\mathbf{G}'_E$ と $\dot{\boldsymbol{\theta}}_E$ は

$$\mathbf{G}'_E = \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_E = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

である。 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_E$ は式(4.51)のオイラー角 $\boldsymbol{\theta}_E \equiv [\phi \ \theta \ \psi]^T$ の時間微分である。なお、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_E$ を $\boldsymbol{\omega}^{IOB}$ で表わすには $\mathbf{G}'_E$ の逆マトリックスが必要である。これは

$$(\mathbf{G}'_E)^{-1} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta \cos\psi & -\sin\theta \sin\psi & 0 \\ -\cos\theta \sin\psi & -\cos\theta \cos\psi & \sin\theta \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

となり、 $\theta = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$ に近づくと数値的困難を生じる。

$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ の枠 O の成分表示 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = \mathbf{e}^{(O)T} \boldsymbol{\omega}^{OB}$, $\boldsymbol{\omega}^{OB} \equiv [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ は

$$\boldsymbol{\omega}^{OB} = \mathbf{A}^{OB} \boldsymbol{\omega}^{IOB} = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{G}'_E \dot{\boldsymbol{\theta}}_E = \mathbf{G}_E \dot{\boldsymbol{\theta}}_E \quad (5.55)$$

となる。ここで

$$\mathbf{G}_E \equiv \mathbf{A}^{OB} \mathbf{G}'_E = \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\phi \sin\theta \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi \sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

である。

[復習5.3_1] 回転の角度表現の復習

上では角速度と回転角の時間微分の関係調べた。角速度は積分できない量であるために、このような関係の導出が必要なのである。

4.4節では回転の角度表現を扱った。その回転の角度表現について復習する。

図4.5は x 軸まわりの回転を示している。

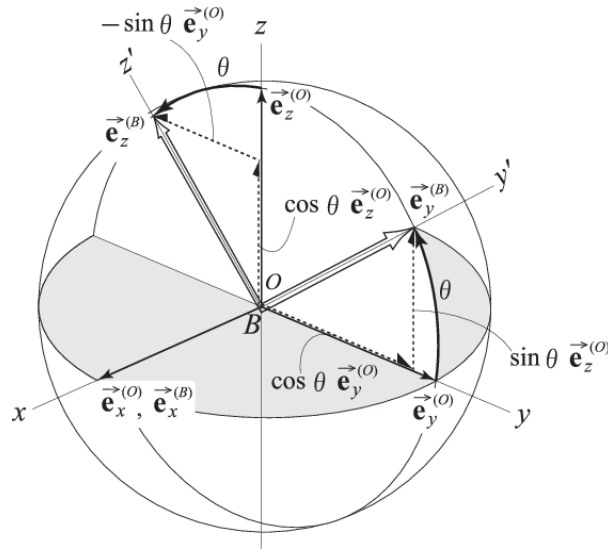


図4.5 x 軸を基準とした回転

これは、枠 $\{O, \mathbf{e}^{(O)}\}$ を $\vec{\mathbf{e}}_x^{(O)}$ 軸まわりに θ だけ回転させ新たな枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ を作ったとき回転変換を説明する図で、 $\mathbf{e}^{(B)}$ と $\mathbf{e}^{(O)}$ の関係は

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}_x \mathbf{e}^{(O)}, \quad \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

で与えられる。なお、 $\mathbf{e}^{(B)} = [\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} \quad \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} \quad \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}]^T$ および $\mathbf{e}^{(O)} = [\vec{\mathbf{e}}_x^{(O)} \quad \vec{\mathbf{e}}_y^{(O)} \quad \vec{\mathbf{e}}_z^{(O)}]^T$ であり、 $\mathbf{R}_x$ は基本回転変換マトリックスであり座標変換マトリックスの逆 $(\mathbf{A}^{OB})^T$ と等しい。

同様に y 軸まわり、 z 軸まわりの回転角 θ の基本回転マトリックス $\mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ は

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

で与えられた。

空間上のある点 P の運動を枠 $\{O, \mathbf{e}^{(O)}\}$ の座標で見た場合と、これに対して角度の変換がオイラー角、軸 $3(\phi) \rightarrow 1(\theta) \rightarrow 3(\psi)$ の順序で回転した枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ の座標で見た場合には

$$\mathbf{e}^{(O)} = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{e}^{(B)} \quad (a)$$

の関係がある。ただし、座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{OB} &= \mathbf{R}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\psi - \sin\phi \cos\theta \sin\psi \\ \sin\phi \cos\psi + \cos\phi \cos\theta \sin\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ -\cos\phi \sin\psi - \sin\phi \cos\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\theta \\ -\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\theta \cos\psi & -\cos\phi \sin\theta \\ \sin\theta \cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

角速度 $\vec{\omega}^{OB}$ の枠 O の成分表示 $\vec{\omega}^{OB} = \mathbf{e}^{(O)T} \boldsymbol{\omega}^{OB}$, $\boldsymbol{\omega}^{OB} \equiv [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ と枠 B の成分表示 $\vec{\omega}^{OB} = \mathbf{e}^{(B)T} \boldsymbol{\omega}^{IOB}$, $\boldsymbol{\omega}^{IOB} \equiv [\omega'_x \ \omega'_y \ \omega'_z]^T$ の関係は

$$\boldsymbol{\omega}^{OB} = \mathbf{A}^{OB} \boldsymbol{\omega}^{IOB} \quad (b)$$

である。

角速度は積分できない量であるから回転角の時間微分との関係を式(5.52b)や(5.55)と求め、得られた各速度を基に、これらの関係式から $\dot{\boldsymbol{\theta}}_E$ を求め、これを積分して回転角 $\boldsymbol{\theta}_E \equiv [\phi \ \theta \ \psi]^T$ を計算することが行われる。