

今回はSL(short lecture)通算第20回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその四回目として速度ベクトルの時間微分について学ぶ。 2021.12.16 清水

5.2 速度

5.2.1 幾何ベクトルの時間微分

任意のベクトル $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(t)$ を考えよう。このベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ の枠 O と枠 B での1回微分の関係を求める。 $\vec{\mathbf{u}}$ を慣性枠 O と相対移動枠 B の基底ベクトルでそれぞれ成分に分解すると

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{e}^{(O)T} \mathbf{u}_O = \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{u}_B \quad (5.33)$$

この成分 $\mathbf{u}_O, \mathbf{u}_B$ は式(4.15)*より

$$\mathbf{u}_O = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{u}_B$$

これを時間で1回微分すると

$$\dot{\mathbf{u}}_O = \mathbf{A}^{OB} \dot{\mathbf{u}}_B + \dot{\mathbf{A}}^{OB} \mathbf{u}_B \stackrel{(5.16)}{=} \mathbf{A}^{OB} \dot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{A}^{OB} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} \mathbf{u}_B = \mathbf{A}^{OB} \left(\dot{\mathbf{u}}_B + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} \mathbf{u}_B \right) \quad (5.34)$$

となる**。これに左からベクトリックス $\mathbf{e}^{(O)T}$ を作用させると

$$\mathbf{e}^{(O)T} \dot{\mathbf{u}}_O = \mathbf{e}^{(O)T} \mathbf{A}^{OB} \dot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{e}^{(O)T} \mathbf{A}^{OB} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} \mathbf{u}_B \stackrel{(4.6b)}{=} \mathbf{e}^{(B)T} \dot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{e}^{(B)T} \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} \mathbf{u}_B \right) \quad (5.35)$$

となり***、これを幾何ベクトルで表すと、輸送則と呼ばれる

$$\frac{{}^O d}{dt} \vec{\mathbf{u}} = \frac{{}^B d}{dt} \vec{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{u}} \quad (5.36)$$

枠 O での微分 枠 B での微分 輸送項

を得る。ここで ${}^O(d\vec{\mathbf{u}}/dt)$ は枠 O でのベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ の時間微分、 ${}^B(d\vec{\mathbf{u}}/dt)$ は枠 B でのベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ の時間微分、 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{u}}$ は輸送項である。 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ は、枠 B の枠 O に対する角速度ベクトルである。 $\vec{\mathbf{u}}$ が枠 B に固定されている場合に限り、 ${}^O(d\vec{\mathbf{u}}/dt)$ は

枠 B の枠 O に対する速度ベクトルとなる。

つぎにベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ の枠 O と枠 B での2回微分の関係を得るために式(5.36)に任意ベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ として ${}^B(d\vec{\mathbf{u}}/dt)$ を用いると

$$\frac{{}^O d}{dt} \left(\frac{{}^B d}{dt} \vec{\mathbf{u}} \right) = \frac{{}^B d}{dt} \left(\frac{{}^O d}{dt} \vec{\mathbf{u}} \right) + \vec{\omega}^{OB} \times \left(\frac{{}^B d}{dt} \vec{\mathbf{u}} \right) \quad (5.37)$$

なる関係式を得る。

さらに、枠 O でのベクトル $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$ の時間微分は

$$\frac{{}^O d\vec{\mathbf{u}}}{dt} = \sum_{l=1}^k \frac{{}^O \partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{{}^O \partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (5.38)$$

となる。

[補足5.2] 次式に注意すべきである。

$$\begin{aligned} \frac{{}^O d}{dt} \left(\frac{{}^B d}{dt} \vec{\mathbf{u}} \right) &\neq \frac{{}^B d}{dt} \left(\frac{{}^O d}{dt} \vec{\mathbf{u}} \right), & \frac{{}^O \partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial q_i} &\neq \frac{{}^B \partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial q_i}, & (i=1, 2, \dots, k) \\ \frac{{}^O \partial}{\partial q_i} \left(\frac{{}^B \partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial q_j} \right) &\neq \frac{{}^B \partial}{\partial q_j} \left(\frac{{}^O \partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial q_i} \right), & (i, j=1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

◇

* 式(4.15)は次式で与えられる。すなわち、幾何ベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ の枠 O と枠 B での成分表示を $\mathbf{a}_O$ と $\mathbf{a}_B$ と書き、代数ベクトルの枠 B から枠 O への座標変換マトリックスを $\mathbf{A}^{OB}$ と書くと次式が成り立つ。

$$\mathbf{a}_O = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{a}_B \quad (4.15)$$

** 式(5.16)は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB} \tilde{\omega}_B^{OB} = \tilde{\omega}_O^{OB} \mathbf{A}^{OB} \quad (5.16)$$

*** 式(4.6b)は次式で与えられる。

$$\mathbf{e}^{(C)T} = \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{A}^{BC} \quad (4.6b)$$

[補足例題5.2_1] 幾何ベクトルの時間微分の別の導出法

幾何ベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ を枠 O に対して移動する枠 B の基底ベクトル $\mathbf{e}^{(B)} = [\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}, \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}, \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}]^T$ およびその成分 $\mathbf{u}_B = [u_{Bx} \ u_{By} \ u_{Bz}]^T$ を用いて

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{u}_B = u_{Bx} \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + u_{By} \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + u_{Bz} \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \quad (a)$$

と書こう。このベクトル $\vec{\mathbf{u}}$ を枠 O に対して時間微分すると、式(a)より

$$\begin{aligned} \frac{{}^O d \vec{\mathbf{u}}}{dt} &= \frac{{}^O d}{dt} (u_{Bx} \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + u_{By} \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + u_{Bz} \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}) \\ &= \dot{u}_{Bx} \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + \dot{u}_{By} \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + \dot{u}_{Bz} \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} + u_{Bx} \dot{\vec{\mathbf{e}}}_x^{(B)} + u_{By} \dot{\vec{\mathbf{e}}}_y^{(B)} + u_{Bz} \dot{\vec{\mathbf{e}}}_z^{(B)} \end{aligned} \quad (b)$$

となる。ただし

$$\frac{{}^O d \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{e}}}_x^{(B)}, \quad \frac{{}^O d \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{e}}}_y^{(B)}, \quad \frac{{}^O d \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{e}}}_z^{(B)} \quad (c)$$

と書いている。式(b)の右辺の、初めの3つの項は移動する枠 B から観察した、 $\vec{\mathbf{u}}$ の局所枠の変化と見ることができる。したがって、これを

$$\frac{{}^B d \vec{\mathbf{u}}}{dt} = \dot{u}_{Bx} \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + \dot{u}_{By} \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + \dot{u}_{Bz} \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \quad (d)$$

と書くことにする。

枠 O に対する枠 B の回転角速度を $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ と書くと、本文の式(5.8)の関係式は

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_x^{(B)} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}, \quad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_y^{(B)} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}, \quad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_z^{(B)} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \quad (5.8)$$

と書ける。この式(5.8)と式(d)を式(b)に用いると

$$\begin{aligned} \frac{{}^O d \vec{\mathbf{u}}}{dt} &= \frac{{}^B d \vec{\mathbf{u}}}{dt} + u_{Bx} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + u_{By} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + u_{Bz} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \\ &= \frac{{}^B d \vec{\mathbf{u}}}{dt} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times (u_{Bx} \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + u_{By} \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + u_{Bz} \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}) \end{aligned}$$

となるから、式(a)を考慮すると

$$\frac{{}^O d\vec{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{{}^B d\vec{\mathbf{u}}}{dt} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} \times \vec{\mathbf{u}} \quad (\text{e})$$

を得る。この式は本文の式(5.36)と同じである。

なお、スカラー変数 u_{Bx}, u_{By}, u_{Bz} の時間微分は枠に依存せず $\dot{u}_{Bx}, \dot{u}_{By}, \dot{u}_{Bz}$ となることを式(b)では用いている。