SL第19回　SL-MBD(1)_5.3_5章速度と加速度-角速度3

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第19回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその三回目として角速度ベクトルの性質について学ぶ。　2021.11.25　清水

5.1.3　角速度ベクトルの性質

角速度ベクトルにはいくつかの性質がある。全体基準枠と移動回転枠を交換すると角速度ベクトルの符号が変わる。すなわち

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = -\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BO} \tag{5.19}$$

これを証明するために $\mathbf{A}^{OB}\mathbf{A}^{BO} = \mathbf{I}_3$ を時間で微分すると

$$\mathbf{A}^{OB}\dot{\mathbf{A}}^{BO} + \dot{\mathbf{A}}^{OB}\mathbf{A}^{BO} = \mathbf{0}$$

を得る。これに式(5.16) *を代入し、微分項を消去すると

$$\mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{BO}\mathbf{A}^{BO} + \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB}\mathbf{A}^{BO} = \mathbf{0}$$

となる。これに式(4.20)、すなわち

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{BO}\mathbf{A}^{BO} &= \left(\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\omega}_B^{BO}\right)^{\sim} \\ \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB}\mathbf{A}^{BO} &= \left(\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\omega}_B^{OB}\right)^{\sim} \end{aligned}\right\}$$

を代入し～をとると

$$\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\omega}_B^{BO} + \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\omega}_B^{OB} = \mathbf{0}$$

となる。この式は任意の $\mathbf{A}^{OB}$ に対して成り立つから

$$\boldsymbol{\omega}_B^{BO} + \boldsymbol{\omega}_B^{OB} = \mathbf{0} \tag{5.20}$$

となる。$\boldsymbol{\omega}_B^{BO}$, $\boldsymbol{\omega}_B^{OB}$ はいずれも枠 B の成分であるから $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = -\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BO}$ と書くことができ式(5.19)が得られた。角速度ベクトルには加法性、すなわち

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} \tag{5.21}$$

が成り立つ([補足5.1]参照)。

[補足5.1]　枠C内に固定された任意ベクトル$\vec{\mathbf{u}}$に対して、${}^{C}(d\vec{\mathbf{u}}/dt)=\mathbf{0}$となるから

$$\frac{{}^{O}d\vec{\mathbf{u}}}{dt}=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}\times\vec{\mathbf{u}},\quad \frac{{}^{B}d\vec{\mathbf{u}}}{dt}=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\times\vec{\mathbf{u}} \tag{5.22}$$

となる。一方ベクトル$\vec{\mathbf{u}}$の微分に関しては後述の式(5.36)より

$$\frac{{}^{O}d\vec{\mathbf{u}}}{dt}=\frac{{}^{B}d\vec{\mathbf{u}}}{dt}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{u}} \tag{5.23}$$

となる性質がある。式(5.23)に式(5.22)を代入すると

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}\times\vec{\mathbf{u}}=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC}\times\vec{\mathbf{u}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\times\vec{\mathbf{u}} \tag{5.24}$$

枠C内のすべての$\vec{\mathbf{u}}$について式(5.24)が成立するから

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OC}=\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}+\vec{\boldsymbol{\omega}}^{BC} \tag{5.25}$$

となる。　◇

[例題5.2]　対称なこまの回転運動 [2)]

　図5.3のように全体基準枠O内で運動するこまを考える。こまは対称形状をしており、頂点Cが点Oに接しながら回転しているとする。こまは水平には移

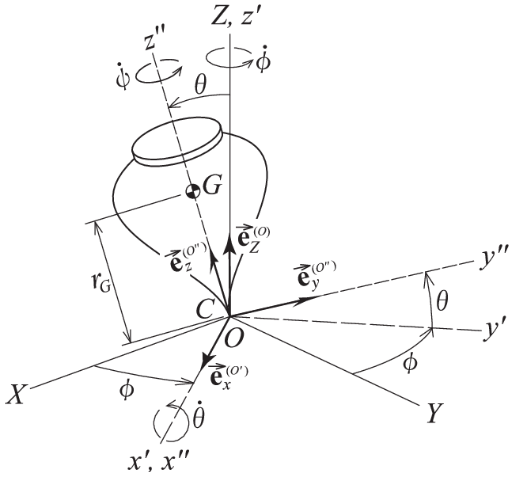


図5.3　対称なこまの運動

動しないものとする。オイラー角の回転変換を逐次、$3(\phi)-1(\theta)-3(\psi)$ の順序で行ない、枠 $O-XYZ \to$ 枠 $O'-x'y'z' \to$ 枠 $O''-x''y''z''$ となったとする。

枠 O に対する枠 O'' の回転角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OO''}$ は

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OO''} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OO'} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{O'O''} = \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}_Z^{(O)} + \dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_x^{(O')} = \dot{\phi}(\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_y^{(O'')} + \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_z^{(O'')}) + \dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_x^{(O'')} \tag{5.26}$$

となる。この角速度に z'' 軸まわりのスピン角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{O''B} = \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z^{(O'')}$ を加えると、枠 O に対するこまの(枠 B の)回転角速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ が求まる。この相対基準枠 O'' を特別に F 枠と呼ぶことにする[2)]。これに伴い、基底ベクトルとして $\vec{\mathbf{e}}_x^{(O'')}, \vec{\mathbf{e}}_y^{(O'')}, \vec{\mathbf{e}}_z^{(O'')}$ の代わりに新たに $\vec{\mathbf{f}}_x, \vec{\mathbf{f}}_y, \vec{\mathbf{f}}_z$ を割当てることにする。こまの角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ は

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \equiv \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OF} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{FB} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OO''} + \vec{\boldsymbol{\omega}}^{O''B} \tag{5.27}$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OF} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OO''} = \dot{\theta}\vec{\mathbf{f}}_x + \dot{\phi}\sin\theta\vec{\mathbf{f}}_y + \dot{\phi}\cos\theta\vec{\mathbf{f}}_z \quad , \qquad \vec{\boldsymbol{\omega}}^{FB} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{O''B} = \dot{\psi}\vec{\mathbf{f}}_z \tag{5.28}$$

と書くことができ、最終的に $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ は

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB} = \dot{\theta}\vec{\mathbf{f}}_x + \dot{\phi}\sin\theta\vec{\mathbf{f}}_y + (\dot{\phi}\cos + \dot{\psi})\vec{\mathbf{f}}_z \equiv \omega_x\vec{\mathbf{f}}_x + \omega_y\vec{\mathbf{f}}_y + \omega_z\vec{\mathbf{f}}_z \tag{5.29}$$

となる。 枠 O に対するこまの重心の速度 $\vec{\mathbf{v}}_0^G$ は

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_0^G = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}^{CG} &= [\dot{\theta}\vec{\mathbf{f}}_x + \dot{\phi}\sin\theta\vec{\mathbf{f}}_y + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{\mathbf{f}}_z] \times r_G\vec{\mathbf{f}}_z \\ &= r_G\dot{\phi}\sin\theta\vec{\mathbf{f}}_x - r_G\dot{\theta}\vec{\mathbf{f}}_y = r_G\omega_y\vec{\mathbf{f}}_x - r_G\omega_x\vec{\mathbf{f}}_y\end{aligned} \tag{5.30}$$

となる[式(5.43)参照]。 ◇

One point　角速度ベクトルに関連する種々の公式

(1)　座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ の時間微分 $\dot{\mathbf{A}}^{OB}\left(\equiv d\mathbf{A}^{OB}/dt\right)$ は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}^{OB}$ および $\boldsymbol{\omega}'^{OB}$ から作られるチルダマトリックス $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ および $\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB}$ との間に

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{OB}\mathbf{A}^{OB} \quad , \qquad \dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}'^{OB} \tag{5.31}$$

の関係がある[式(5.16)参照]。これはしばしばポアソンの運動学関係式と呼ばれる。この式は $\mathbf{A}^{OB}$ の時間微分を求めるときに良く用いられる(9.3節参照)。

(2)　移動枠内で一定成分を持つベクトル $\vec{\mathbf{c}}$ に対して

$$\dot{\vec{\mathbf{c}}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{c}} \tag{5.32}$$

が成立する[式(5.6)**参照]。これは式(5.31)と同形である。

(3)　枠 O に対して枠 B があるとき、次式が成立する[式(5.10)参照]。

$$\frac{{}^{B}d\mathbf{e}^{(B)T}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}^{(B)T} = \mathbf{e}^{(B)T}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B}^{OB}$$

参考文献

[5章]

1) T. R. Kane and D. A. Levinson, Dynamics: Theory and Applications, McGraw－Hill (1985), p.16.

2) H. Baruh, Analytical Dynamics, McGraw-Hill (1999), pp.372-377.

----

*　式(5.16)は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B}^{OB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{O}^{OB}\mathbf{A}^{OB} \qquad (5.16)$$

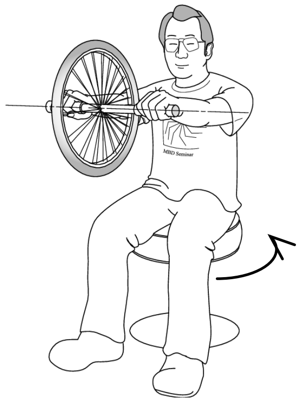
**　式(5.6)は次式で与えられる。

$$\dot{\vec{\mathbf{c}}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{c}} \qquad (5.6)$$

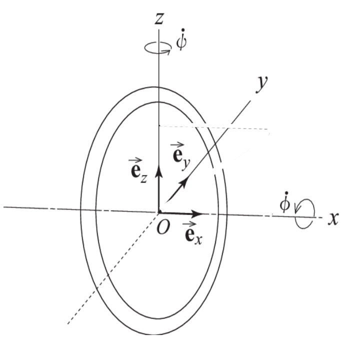
[補足例題5.1_1]　自転車の車輪の角速度

角運動量が保存される授業の道具としてよく、補足図5.1(a), (b), (c)に示すような車輪が用いられる。

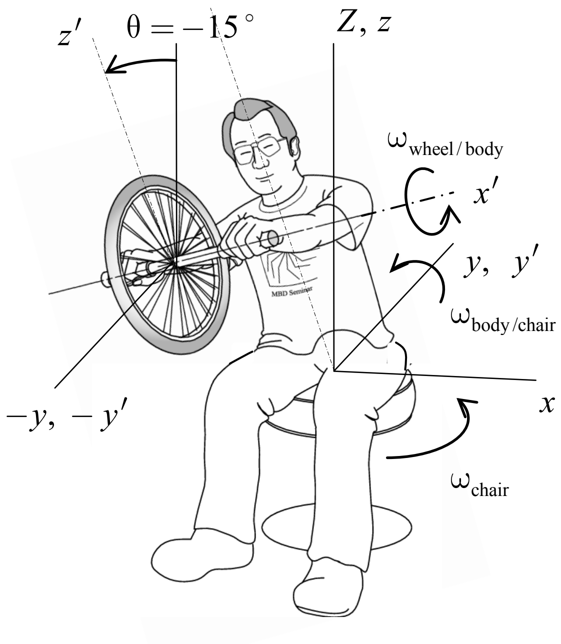
(a)



(b)



(c)



補足図5. 1 車輪の角速度

補足図5.1(a)は人が自由に回転できる椅子に座って、回転する車輪の軸を軸受を介してつかんでいる様子である。車輪は一定回転速度$\dot{\phi}$（$\dot{\phi} = 4\,\mathrm{rad/s}$）で回転しているとする。このときの座標系と基底ベクトルを図(b)に示す。車軸の右方向をx軸にとり、上方向をz軸として、全体枠のZ軸と一致させている。右手系で決る残りの座標軸がy軸である。この図ではy軸は手前から奥の方向が正である。

ある与えられた瞬間に椅子(chair)の回転角速度$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{chair}}$は$z$軸の正方向に$\dot{\psi} = 0.6\,\mathrm{rad/s}$で与えられているとする。すなわち

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{chair}} = \dot{\psi}\vec{\mathbf{e}}_z = 0.6\vec{\mathbf{e}}_z = 0.6\vec{\mathbf{e}}_Z \tag{a}$$

ただし$\vec{\mathbf{e}}_Z$はZ軸の基底ベクトルである。

図(c)はこの人がつぎに体の中心線をz軸から$-y$軸回りに$\dot{\theta} = 0.3\,\mathrm{rad/s}$で傾け、傾き角が$\theta = -15^\circ$になった状態を示している。このとき車軸も同様の運動をするとする。すると、椅子に対する人の相対角速度$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{body/chair}}$は

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{body/chair}} = -\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}'_y = -0.3\vec{\mathbf{e}}'_y = -0.3\vec{\mathbf{e}}_y \tag{b}$$

と書ける。車輪の回転角速度は$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{wheel/body}}$と表わされ

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{wheel/body}} = \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}'_x = 4\vec{\mathbf{e}}'_x \tag{c}$$

と書ける。以上より車輪の角速度$\vec{\boldsymbol{\omega}}$は式(5.25)の性質を利用して

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{chair}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{body/chair}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{wheel/body}} = 0.6\vec{\mathbf{e}}_z - 0.3\vec{\mathbf{e}}'_y + 4\vec{\mathbf{e}}'_x \tag{d}$$

と書ける。図示した瞬間では$x\,y\,z$座標系の基底ベクトル$\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$と$x'\,y'\,z'$座標系の基底ベクトル$\vec{\mathbf{e}}'_x, \vec{\mathbf{e}}'_y, \vec{\mathbf{e}}'_z$の間には

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x \\ \vec{\mathbf{e}}_y \\ \vec{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & 0 & \sin(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}}'_x \\ \vec{\mathbf{e}}'_y \\ \vec{\mathbf{e}}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}}'_x \\ \vec{\mathbf{e}}'_y \\ \vec{\mathbf{e}}'_z \end{bmatrix} \tag{e}$$

の関係があるから

$$\vec{\mathbf{e}}_z = (\sin\theta)\vec{\mathbf{e}}'_x + (\cos\theta)\vec{\mathbf{e}}'_z = \sin 15^\circ\,\vec{\mathbf{e}}'_x + \cos 15^\circ\,\vec{\mathbf{e}}'_z = 0.2588\,\vec{\mathbf{e}}'_x + 0.9659\,\vec{\mathbf{e}}'_z \tag{f}$$

を得る。これを式(d)に代入すると車輪に固定された座標系を用いて角速度は

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\omega}} &= 0.6\vec{\mathbf{e}}_z - 0.3\vec{\mathbf{e}}'_y + 4\vec{\mathbf{e}}'_x = 0.6 \times (0.2588\,\vec{\mathbf{e}}'_x + 0.9659\,\vec{\mathbf{e}}'_z) - 0.3\vec{\mathbf{e}}'_y + 4\vec{\mathbf{e}}'_x \\ &= 4.1553\vec{\mathbf{e}}'_x - 0.3\vec{\mathbf{e}}'_y + 0.5795\vec{\mathbf{e}}'_z \end{aligned} \tag{g}$$

と書ける。これは基底ベクトル$\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$を用いて書くこともできる。