SL第18回　SL-MBD(1)_5.2_5章速度と加速度-角速度2

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第18回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその二回目として座標変換マトリックスの時間微分と角速度について学ぶ。　2021.11.11　清水

5.1.2　座標変換マトリックスの時間微分と角速度

座標変換マトリックスの時間微分を考える。枠 B から枠 O への座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ は式(4.9)より

$$\mathbf{A}^{OB} = \mathbf{e}^{(O)} \cdot \mathbf{e}^{(B)T} \tag{5.14}$$

となる。スカラーの時間微分は観測者の位置には無関係であるから、マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ の要素(スカラー)の時間微分は観測者には無関係である。この場合の時間微分には単に文字の上に●をつける。一方、式(5.14)の右辺の時間微分には観測者の指定が必要である。これを枠 O および枠 B に関して微分すると

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{e}^{(O)} \cdot \frac{{}^{O}d}{dt}\mathbf{e}^{(B)T} = \frac{{}^{B}d}{dt}\mathbf{e}^{(O)} \cdot \mathbf{e}^{(B)T} \tag{5.15}$$

を得る。右辺第1項はさらに

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{e}^{(O)} \cdot \frac{{}^{O}d}{dt}\mathbf{e}^{(B)T} \underset{(5.10)}{=} \mathbf{e}^{(O)} \cdot \mathbf{e}^{(B)T}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB}$$

したがって式(5.14)および(4.21)* を用いて

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB}\mathbf{A}^{OB} \tag{5.16}$$

となる。これはポアソンの運動学関係式(Poisson kinematical relations)と呼ばれる。この式より角速度は

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB} = \dot{\mathbf{A}}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^T \tag{5.17a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} = (\mathbf{A}^{OB})^T \dot{\mathbf{A}}^{OB} \tag{5.17b}$$

となる。角速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ の枠 O の成分表示 $\boldsymbol{\omega}_O^{OB}(\equiv \boldsymbol{\omega}^{OB})$ と枠 B の成分表示 $\boldsymbol{\omega}_B^{OB}(\equiv \boldsymbol{\omega}'^{OB})$ との関係を導く。式(5.17a)は式(5.17b),式(4.20)を用いて変形すると

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB} = \dot{\mathbf{A}}^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^T \underset{(5.16)}{=} \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB}(\mathbf{A}^{OB})^T \underset{(4.20)}{=} (\mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\omega}_B^{OB})^{\tilde{}}$$

したがって～をはずすと

$$\boldsymbol{\omega}_O^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\boldsymbol{\omega}_B^{OB} \tag{5.18}$$

となる。

----

* 式(4.21)：

公式

$$\tilde{\mathbf{a}}_B \mathbf{A}^{BC} = \mathbf{A}^{BC}\tilde{\mathbf{a}}_C \tag{4.21}$$

が成り立つ。ここで $\mathbf{a}_B$ と $\mathbf{a}_C$ は幾何ベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ をそれぞれ二つの枠 B と C で表わしたときの代数ベクトルである。$\mathbf{A}^{BC}$ は座標変換マトリックスであり、ベクトル $\mathbf{a}_C$ をベクトル $\mathbf{a}_B$ に座標変換する。すなわち $\mathbf{a}_B = \mathbf{A}^{BC}\mathbf{a}_C$ が成り立つ。

[補足説明5.1_2]　ポアソンの運動学関係式について

ポアソンの運動学関係式は、本文において

$$\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB}\mathbf{A}^{OB} \tag{5.16}$$

と表わされている。$\mathbf{A}^{OB}$ は、任意のベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ を枠 B で表わしたベクトル $\mathbf{a}_B$ を、枠 O で表わしたベクトル $\mathbf{a}_O$ に座標変換するマトリックスである。$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB}$ は静止する全体枠 O に対する枠 B の回転角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ を枠 B で表わしたベクトル $\boldsymbol{\omega}_B^{OB} = [\omega_1'\ \omega_2'\ \omega_3']^T$ のチルダマトリックス、$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB}$ は回転角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ を枠 O で表わしたベクトル $\boldsymbol{\omega}_O^{OB} = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$ のチルダマトリックスである。式(5.16)の右辺の第一

項の式 $\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \mathbf{A}^{OB}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{OB}$ を具体的に書くと

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot a_{11} & \dot a_{12} & \dot a_{13}\\ \dot a_{21} & \dot a_{22} & \dot a_{23}\\ \dot a_{31} & \dot a_{32} & \dot a_{33}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\omega'_3 & \omega'_2\\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1\\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a_{12}\omega'_3 - a_{13}\omega'_2 & a_{13}\omega'_1 - a_{11}\omega'_3 & a_{11}\omega'_2 - a_{12}\omega'_1\\ a_{22}\omega'_3 - a_{23}\omega'_2 & a_{23}\omega'_1 - a_{21}\omega'_3 & a_{21}\omega'_2 - a_{22}\omega'_1\\ a_{32}\omega'_3 - a_{33}\omega'_2 & a_{33}\omega'_1 - a_{31}\omega'_3 & a_{31}\omega'_2 - a_{32}\omega'_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{a}$$

となる。式(5.16)の右辺の第二項の式 $\dot{\mathbf{A}}^{OB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_O^{OB}\mathbf{A}^{OB}$ を具体的に書くと

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot a_{11} & \dot a_{12} & \dot a_{13}\\ \dot a_{21} & \dot a_{22} & \dot a_{23}\\ \dot a_{31} & \dot a_{32} & \dot a_{33}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a_{31}\omega_2 - a_{21}\omega_3 & a_{32}\omega_2 - a_{22}\omega_3 & a_{33}\omega_2 - a_{23}\omega_3\\ a_{11}\omega_3 - a_{31}\omega_1 & a_{12}\omega_3 - a_{32}\omega_1 & a_{13}\omega_3 - a_{33}\omega_1\\ a_{21}\omega_1 - a_{11}\omega_2 & a_{22}\omega_1 - a_{12}\omega_2 & a_{23}\omega_1 - a_{13}\omega_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{b}$$

となる。これら式(a)と(b)より例えば、座標変換の時間変化率 $\dot{\mathbf{A}}^{OB}$ の(1,2)成分 $\dot a_{12}$ は

$$\dot a_{12} = a_{13}\omega'_1 - a_{11}\omega'_3 = a_{32}\omega_2 - a_{22}\omega_3 \tag{c}$$

となり、枠 B の角速度成分 ω'_i (物質記述)で表わすと式(c)の右辺第一項、枠 O の角速度成分 ω_i (空間記述)で表わすと式(c)の右辺第二項となる。このように座標変換マトリックスの時間変化率の成分は二つの方法で表わすことができる。