

今回はSL(short lecture)通算第17回目。5章の角速度・速度および角加速度・加速度の内容を十回にわたって講義している。今回はその一回目として角速度の内容に関して、微小回転と角速度について学ぶ。 2021.10.21 清水

5. 角速度・速度および角加速度・加速度

本章ではまず、角速度と速度について学ぶ。座標変換マトリックスと角速度の関係、角加速度ベクトルの性質を学ぶ。速度は位置ベクトルの時間微分として定義されるが、観測者がどこにいるかが重要であり、このことについて説明する。つぎにオイラー角の時間微分と角速度の関係を調べる。最後に角加速度と加速度の式を導出する。

5.1 角速度

5.1.1 微小回転と角速度

4.3節より、移動物体 B に固定したベクトルの微小回転角 $\Delta\theta$ の回転変換は式(4.42)のように表されることを見た。図5.1は微小回転変換を表したものである。

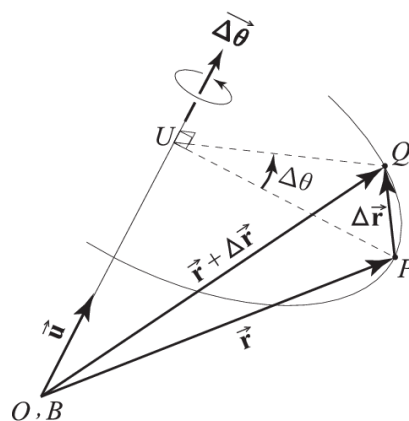


図5.1 物体に固定したベクトルの微小回転

式(4.42)をこの図と対応させると

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r} + \overrightarrow{\Delta\theta} \times \vec{r} \quad (5.1)$$

すなわち

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{\Delta\theta} \times \vec{r} \quad (5.2)$$

となる。この $\overrightarrow{\Delta\theta}$ は(瞬間)微小回転(軸)ベクトルと呼ばれる。回転はこのベクトルを通る軸まわりに行われる。 $\overrightarrow{\Delta\theta}$ は微小回転を成分として $\overrightarrow{\Delta\theta} = \Delta\theta_x \vec{e}_x^{(B)} + \Delta\theta_y \vec{e}_y^{(B)} + \Delta\theta_z \vec{e}_z^{(B)}$ により定義された量である。 $\vec{\theta}$ 単独ではなく $\overrightarrow{\Delta\theta}$ 全体でベクトルを表すことを強調してこのように表現する。すなわち $\vec{\theta}$ の微小量ではないことに注意が必要である。この微小回転は微小時間内で起こっているとし、固定枠 O で観測しているとする。式(5.2)の左辺は $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{^o d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}} \quad (5.3)$$

となる ($\dot{\vec{r}}$ の上の $\cdot$ は枠 O における時間微分)。式(5.2)の右辺の項に対して

$$\vec{\omega} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\theta}}{\Delta t} \quad (5.4a)$$

と書き、はじめの枠 O に対する移動枠 B の角速度と定義する。枠を明確に指定するときは、枠 O から見た枠 B の角速度であるから $\vec{\omega}$ を $\vec{\omega}^{OB}$ と書く。成分表示では後述の式(5.7)のように

$$\vec{\omega} = \omega'_x \vec{e}_x^{(B)} + \omega'_y \vec{e}_y^{(B)} + \omega'_z \vec{e}_z^{(B)}, \quad \omega'_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta'_i}{\Delta t} \quad (i = x, y, z) \quad (5.4b)$$

と書く。 ω'_i ($i = x, y, z$)は回転枠の瞬間角速度である。このように角速度ベクトル $\vec{\omega}$ は、一般に、あるベクトルの微分量ではなく定義された量(ノンホロノミックな量)である。

もし回転が一定の固定軸 $\vec{u}$ まわりに行われるとすると

$$\vec{\omega} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\theta}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \vec{u} = \omega \vec{u}, \quad \omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (5.4c)$$

となり、 $\vec{\omega}$ はこの時に限り厳密な微分量になる。

式(5.2)、(5.3)より

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.5)$$

となる。これより枠 O で観測した位置ベクトルの時間変化 $\dot{\vec{r}}$ は、位置ベクトル $\vec{r}$ と角速度ベクトル $\vec{\omega}$ とに直交していることがわかる。

式(5.5)は移動枠内で一定の成分を持つベクトル $\vec{c}$ に対しても成り立ち

$$\dot{\vec{c}} = \vec{\omega} \times \vec{c} \quad (5.6)$$

と書ける。特別な場合として、 $\vec{c}$ を枠 B でのベクトリックス $\mathbf{e}^{(B)}$ の成分である $\vec{e}_x^{(B)}$, $\vec{e}_y^{(B)}$, $\vec{e}_z^{(B)}$ のいずれかとし、 $\vec{\omega}$ を枠 B の成分表示で

$$\vec{\omega} = \omega'_x \vec{e}_x^{(B)} + \omega'_y \vec{e}_y^{(B)} + \omega'_z \vec{e}_z^{(B)} = (\omega_B^{OB})^T \mathbf{e}^{(B)}, \quad \omega_B^{OB} \equiv [\omega'_x \quad \omega'_y \quad \omega'_z]^T \quad (5.7)$$

と表すと

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_x^{(B)} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_x^{(B)} = -\omega'_y \vec{e}_z^{(B)} + \omega'_z \vec{e}_y^{(B)} \\ \dot{\vec{e}}_y^{(B)} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_y^{(B)} = \omega'_x \vec{e}_z^{(B)} - \omega'_z \vec{e}_x^{(B)} \\ \dot{\vec{e}}_z^{(B)} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_z^{(B)} = -\omega'_x \vec{e}_y^{(B)} + \omega'_y \vec{e}_x^{(B)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と書ける。これはまとめて

$$\frac{{}^o d}{dt} \mathbf{e}^{(B)} = -\mathbf{e}^{(B)} \times \vec{\omega} = -\tilde{\omega}_B^{OB} \mathbf{e}^{(B)} \quad (5.9)$$

または

$$\frac{{}^o d}{dt} \mathbf{e}^{(B)T} = \vec{\omega} \times \mathbf{e}^{(B)T} = \mathbf{e}^{(B)T} \tilde{\omega}_B^{OB} \quad (5.10)$$

と書ける。ただし $\tilde{\omega}_B^{OB}$ は代数ベクトル ω_B^{OB} から作られるチルダマトリックス

$$\tilde{\omega}_B^{OB} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

である。なお式(5.9)、(5.10)の変形には式(2.21)の性質を用いた。

式(5.4)の角速度の定義が唯一の定義ではない。移動枠の基底ベクトル

$\vec{e}_x^{(B)}, \vec{e}_y^{(B)}, \vec{e}_z^{(B)}$ を用いると枠 O に対する枠 B の角速度ベクトル $\vec{\omega}(=\vec{\omega}^{OB})$ は

$$\vec{\omega} \equiv \vec{e}_x^{(B)} (\dot{\vec{e}}_y^{(B)} \cdot \vec{e}_z^{(B)}) + \vec{e}_y^{(B)} (\dot{\vec{e}}_z^{(B)} \cdot \vec{e}_x^{(B)}) + \vec{e}_z^{(B)} (\dot{\vec{e}}_x^{(B)} \cdot \vec{e}_y^{(B)}) \quad (5.12)$$

とも定義される¹⁾。

幾何ベクトルの時間微分は、観測者がどこにいるかが重要である(5.2節参照)。例えば枠 B 上で $\vec{e}^{(B)}$ を微分すると、 $\vec{e}^{(B)}$ は枠 B に対して相対運動をしていないから

$$\frac{{}^B d}{dt} \vec{e}^{(B)} = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

となる。これに対して枠 O 上ではすでに見たように $\mathbf{0}$ とはならず、式(5.9)のようになる。

[例題5.1] 図5.2に示すような回転軸が一定の姿勢を保つ回転を考えよう。固定枠を $O-XYZ$ とし、これを X 軸まわりに θ_1 だけ回転させ $B-x'y'z'$ を得たとする。枠 O に対する枠 $B-x'y'z'$ の角速度 $\vec{\omega}_1$ は

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{e}_x^{(O)} = \dot{\theta}_1 \vec{e}_x^{(B)}$$

となる。

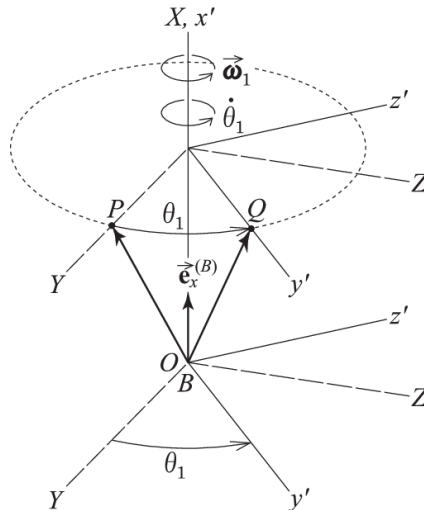


図5.2 回転軸が一定姿勢を保つ回転

[補足説明5.1_1] もう一度、角速度の定義の説明

枠 O から見た枠 B の角速度を $\vec{\omega}$ とすると、枠 B での成分表示では式(5.4b)により

$$\vec{\omega} = \omega'_x \vec{e}_x^{(B)} + \omega'_y \vec{e}_y^{(B)} + \omega'_z \vec{e}_z^{(B)}, \quad \omega'_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta'_i}{\Delta t} \quad (i = x, y, z) \quad (a)$$

と書けた。ここで ω'_i ($i = x, y, z$) は枠 B で見た回転枠の瞬間角速度の成分である。この角速度ベクトル $\vec{\omega}$ は式(a)の右辺から分かる通り ($\vec{\Delta \theta}$ が微小回転を成分として $\vec{\Delta \theta} = \Delta \theta_x \vec{e}_x^{(B)} + \Delta \theta_y \vec{e}_y^{(B)} + \Delta \theta_z \vec{e}_z^{(B)}$ により定義された量であるから $\vec{\omega} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{\Delta \theta} / \Delta t)$ より)、あるベクトル量の微分ではなく定義された量 (ノンホロノミックな量) である。

一方、枠 O に対する枠 B の角速度ベクトル $\vec{\omega}$ は、本文の式(5.12)で説明したように

$$\vec{\omega} \equiv \vec{e}_x^{(B)} (\dot{\vec{e}}_y^{(B)} \cdot \vec{e}_z^{(B)}) + \vec{e}_y^{(B)} (\dot{\vec{e}}_z^{(B)} \cdot \vec{e}_x^{(B)}) + \vec{e}_z^{(B)} (\dot{\vec{e}}_x^{(B)} \cdot \vec{e}_y^{(B)}) \quad (b)$$

とも定義される。この式は回転している枠 B の基底ベクトル $\vec{e}_x^{(B)}$, $\vec{e}_y^{(B)}$ と $\vec{e}_z^{(B)}$ 、およびこれらのベクトルの時間変化率 $\dot{\vec{e}}_x^{(B)}$, $\dot{\vec{e}}_y^{(B)}$ と $\dot{\vec{e}}_z^{(B)}$ を用いて定義されている。式(b)が式(a)と等しいことは、式(b)に式(5.8)を用いて以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &\equiv \vec{e}_x^{(B)} (\dot{\vec{e}}_y^{(B)} \cdot \vec{e}_z^{(B)}) + \vec{e}_y^{(B)} (\dot{\vec{e}}_z^{(B)} \cdot \vec{e}_x^{(B)}) + \vec{e}_z^{(B)} (\dot{\vec{e}}_x^{(B)} \cdot \vec{e}_y^{(B)}) \\ &= \vec{e}_x^{(B)} ((\omega'_x \vec{e}_z^{(B)} - \omega'_z \vec{e}_x^{(B)}) \cdot \vec{e}_z^{(B)}) \\ &\quad + \vec{e}_y^{(B)} ((-\omega'_x \vec{e}_y^{(B)} + \omega'_y \vec{e}_x^{(B)}) \cdot \vec{e}_x^{(B)}) \\ &\quad + \vec{e}_z^{(B)} ((-\omega'_y \vec{e}_z^{(B)} + \omega'_z \vec{e}_y^{(B)}) \cdot \vec{e}_y^{(B)}) \\ &= \omega'_x \vec{e}_x^{(B)} + \omega'_y \vec{e}_y^{(B)} + \omega'_z \vec{e}_z^{(B)} \end{aligned} \quad (c)$$

この式(b)は(a)より抽象的であるが、より数学的である。