

今回はSL(short lecture)通算第16回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義している。今回はその七回目である。物体の姿勢を表現する広い意味のオイラー角の一つであるタイト・ブライアン角(カルダン角)とブライアント角について学ぶ。 2021.09.30 清水

(b) タイト・ブライアン角

オイラー角とは別に、回転軸を x, y, z すべて異なる軸にとることが考えられる。例えば、 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の順の回転を実施すると最終枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ は

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}\mathbf{e}^{(O)} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) = (\mathbf{A}^{OB})^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & & & & & \\ -\sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\theta \sin\phi & & & & & \\ \sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi & & & & & \\ \sin\psi \cos\theta & & -\sin\theta & & & \\ \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\theta \sin\phi & & \cos\theta \sin\phi & & & \\ -\cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi & & \cos\theta \cos\phi & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

となる。 ψ, θ, ϕ はタイト・ブライアン(Tait - Bryan)角またはカルダン(Cardan)角と呼ばれる。特に、図4.8のような車の運動を例にとった場合、車体の長手前方向を X 軸、横方向を Y 軸、これと垂直な上方向を Z 軸とすると、 ψ はヨー角、 θ はピッチ角、 ϕ はロール角である。この角度に対して列マトリックス

$$\boldsymbol{\theta}_r \equiv [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (4.54)$$

を定義しておく。

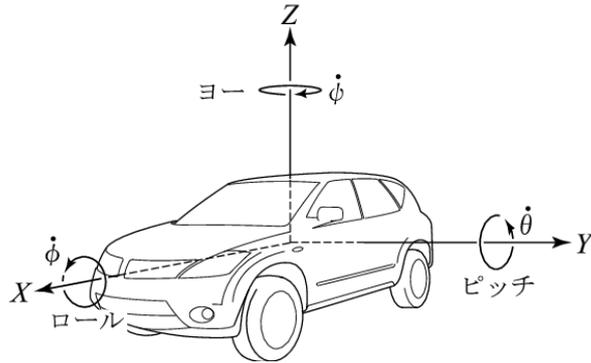


図 4.8 車両の動力学におけるヨー軸, ピッチ軸, ロール軸

(c) ブライヤント角

軸1→2→3の順の回転を実施すると最終枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ は

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R} \mathbf{e}^{(O)} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\psi) = (\mathbf{A}^{OB})^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\phi & & \\ -\cos\theta \sin\phi & & \\ \sin\theta & & \end{bmatrix} \\ &\quad \left. \begin{array}{cc} \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi & \sin\psi \sin\phi - \cos\psi \sin\theta \cos\phi \\ \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \sin\theta \sin\phi & \sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\theta \sin\phi \\ -\sin\psi \cos\theta & \cos\psi \cos\theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

となる。 ψ, θ, ϕ は**ブライヤント (Bryant) 角**と呼ばれる。この角度に対して列マトリックス

$$\boldsymbol{\theta}_B \equiv [\psi \quad \theta \quad \phi]^T \quad (4.57)$$

を定義しておく。

One point 座標変換マトリックスとオイラー角、オイラーパラメータ

枠 O に対する枠 B の座標変換マトリックス \mathbf{A}^{OB} はベクトリックスを用いて

$$\mathbf{e}^{(O)} = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{e}^{(B)}$$

と書ける。一方、枠 O をオイラー角の基本回転により $3(\phi) \rightarrow 1(\theta) \rightarrow 3(\psi)$ と逐次

回転した時に得られる枠 O と枠 B の間の関係は

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{e}^{(O)} = \mathbf{R}\mathbf{e}^{(O)}$$

となる。この回転マトリックス \mathbf{R} と座標変換マトリックス \mathbf{A}^{OB} の間には

$$\mathbf{A}^{OB} = \mathbf{R}^T$$

なる関係がある。

\mathbf{A}^{OB} は6章で述べるオイラーパラメータ $\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{(6.2)}{=} [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3]^T = [p_0 \ \mathbf{p}^T]^T$ により

$$\mathbf{A}^{OB} \stackrel{(6.5a)}{=} (2p_0^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2(\mathbf{p}\mathbf{p}^T + p_0\tilde{\mathbf{p}})$$

と表すこともできる。オイラーパラメータとクォータニオン[quaternion, 四元数(詳しくは文献2)の289-297ページを参照]の性質は類似している。

[補足説明4.4_3] オイラー角順序の呼び名

SL第15回 SL-MBD(1)_4.6_4章位置と姿勢-オイラー角で説明したオイラー角の変換において、オイラー角順序 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ はHistorically Significant、本ショートレクチャーで説明したオイラー角順序 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ はNASA Standard Airplane、今回は説明していないがオイラー角順序 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ はNASA Standard Aerospaceと呼ばれることがある。この軸 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ の変換は $3(\psi) \rightarrow 2(\theta) \rightarrow 3(\phi)$ の順の回転を実施すると最終枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ は

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}\mathbf{e}^{(O)} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) = (\mathbf{A}^{OB})^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta\cos\phi - \sin\psi\sin\phi & & & \\ -\cos\psi\cos\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & & & \\ & \cos\psi\sin\theta & & \\ \sin\psi\cos\theta\cos\phi + \cos\psi\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & & \\ -\sin\psi\cos\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & & \\ & \sin\psi\sin\theta & & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{b}$$

となる。ここで ψ は歳差角 (precession angle)、 θ は章動角 (nutation angle)、 ϕ はスピン角 (spin angle) と呼ばれる。