

今回はSL(short lecture)通算第15回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義している。今回はその六回目である。物体の姿勢を表現するオイラー角について学ぶ。 2021.09.16 清水

4.4.2 回転変換

ここで述べる回転変換は、座標軸に対して基本回転を順次行うことにより実施する。回転の順序によりいろいろな名前のついた回転角があるが、これらはすべて広い意味でのオイラー角であり、オイラー角による回転変換である。

(a) オイラー角

図4.6に示すように x 軸に1, y 軸に2, z 軸に3を対応させ、軸3→1→3の順序で回転する。すなわち、枠 $\{O, \mathbf{e}^{(0)}\}$ を $\vec{\mathbf{e}}_z^{(0)}$ 軸まわりに ϕ だけ回転し枠 $\{O', \mathbf{e}^{(0')}\}$ を得て、つぎに枠 $\{O', \mathbf{e}^{(0')}\}$ を $\vec{\mathbf{e}}_x^{(0')}$ 軸まわりに θ だけ回転し枠 $\{O'', \mathbf{e}^{(0'')}\}$ を得て、つぎに枠 $\{O'', \mathbf{e}^{(0'')}\}$ を $\vec{\mathbf{e}}_z^{(0'')}$ 軸まわりに ψ だけ回転して、最終的に得られる枠を $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ とする。このときのベクトリックス $\mathbf{e}^{(B)}$ と $\mathbf{e}^{(0)}$ の関係は基本回転マトリックスを用いて

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{R} \mathbf{e}^{(0)} \quad (4.48)$$

となる。ここで \mathbf{R} は回転マトリックスと呼ばれ

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & & & \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & & & \\ & \sin \phi \sin \theta & & \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi & & \\ -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi & & \\ & -\cos \phi \sin \theta & & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

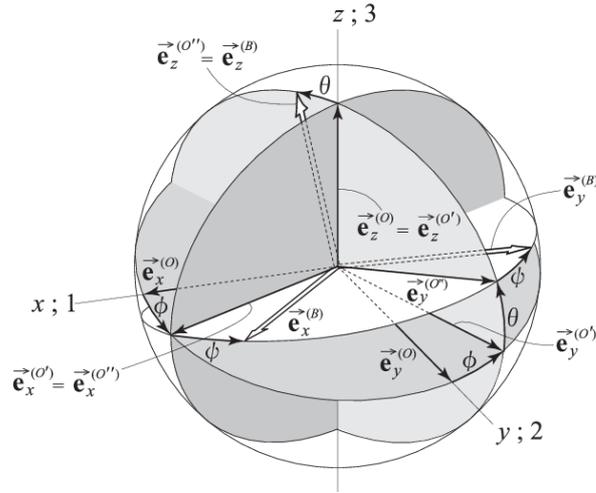


図4.6 オイラー角 ϕ , θ , ψ

となる。一方、 $\mathbf{e}^{(O)} = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{e}^{(B)}$ であるから式(4.48)と(4.49)より

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{OB} &= \mathbf{R}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

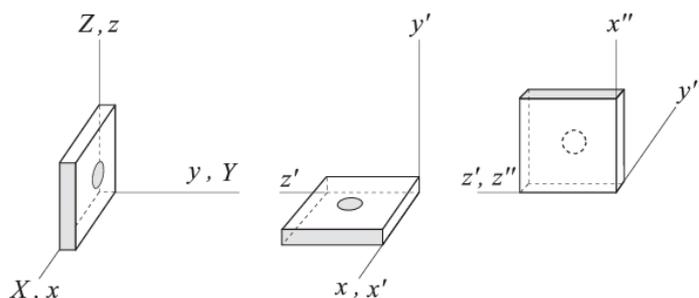
となる。この ϕ (歳差角; precession angle)、 θ (章動角; nutation angle)、 ψ (スピン角; spin angle) の三つの角をオイラー角と呼ぶ。この式は方向余弦マトリックスをオイラー角を用いて表わしたものである。後章のためにオイラー角をまとめて列マトリックス

$$\boldsymbol{\theta}_E \equiv [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (4.51)$$

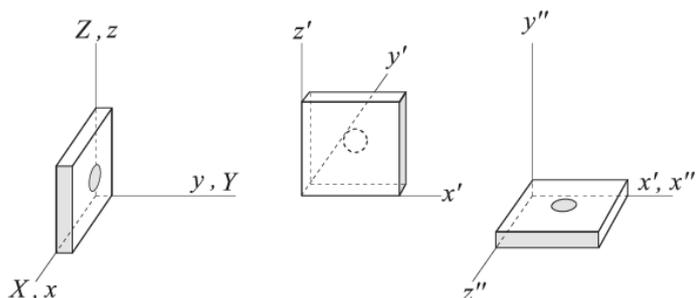
で定義しておく。

これまでの解析から分かるように、回転の順序を変えると変換後の姿勢は異なる。このことを見るために、固定した枠 $O-xyz$ の x 軸まわりと z 軸まわりの物体の回転を考えてみよう。図4.7(a)は回転を x 軸まわり $\rightarrow z$ 軸まわり、図(b)は z 軸まわり $\rightarrow x$ 軸

まわりと行った結果である。図から、このように同じ x 軸まわりと z 軸まわりの回転でも回転の順序により姿勢が異なる、すなわち有限の(大きな)回転は可換とはならない。したがって、回転はベクトル量とはならない。



(a) x 軸 - z 軸 の回転



(b) z 軸 - x 軸 の回転

図4.7 有限回転が可換でないことの説明

【補足説明4.4_2】 オイラー角シーケンス (オイラー角順序)

図4.6において x 軸に1, y 軸に2, z 軸に3を対応させ、軸 x_1, x_2, x_3 と書き、軸 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ の順序で回転させた。まず、枠 $\{O, \mathbf{e}^{(0)}\}$ の座標軸を回転させ枠 $\{O', \mathbf{e}^{(0')}\}$ を得た。このとき座標軸は x'_1, x'_2, x'_3 となる。さらに回転させ枠 $\{O'', \mathbf{e}^{(0'')}\}$ を得た。このときの座標軸は x''_1, x''_2, x''_3 となる。さらに回転させ最終的に枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ を得る。このときの座標軸を b_1, b_2, b_3 と書くことにすれば、この一

連の変換は座標軸の $x_1, x_2, x_3 \rightarrow b_1, b_2, b_3$ 変換である。この変換の順序には 12 種類の組み合わせがある。すなわち

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

である。これらの組み合わせをオイラー角シーケンス(オイラー角順序)と呼ぶ。これには二つのパターンがある。最初と最後のインデックスが同じ場合(3→1→3, 3→2→3など)と異なる場合(1→2→3, 3→2→1など)であり、採用される順序の組は問題に応じ物理的に可視化が容易な組が選ばれる。多用される組は3→1→3, 3→2→3, 1→2→3, 3→2→1などである。本レクチャーで説明した3→1→3の組は、オイラーが最初に用いた歴史的に重要なものであり、上記の 12 種類の組の一つひとつは広い意味のオイラー角と呼ばれるのに対して、狭い意味でのオイラー角である。その他の組については次回のショートレクチャーで説明する。