

今回はSL(short lecture)第13回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義している。今回はその四回目である。物体の運動を記述する場合、その位置と姿勢を表現することが第一義的である。物体の位置を表現する方法を前回に学んだ。今回は物体の姿勢を表現する方法を学ぶ。 2021.07.08 清水

4.3 回転姿勢の表現

図4.3は基準枠 $O-xyz$ と剛体固定枠 $B-x'y'z'$ である。これら二つの枠の原点は一致しているとし、回転前にもこれらの二つの枠は一致していたとする。はじめに枠 O と一致していた剛体固定枠 B が単位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ を回転軸（姿勢軸）として右ねじの方向に Θ だけ剛体回転して図4.3の $B-x'y'z'$ の状態になったとする。図4.4は図4.3の回転軸の部分の拡大図である。図4.4において $\vec{\mathbf{b}}$ は回転前の剛体上のベクトル \overrightarrow{OP} 、 $\vec{\mathbf{a}}$ はこの \overrightarrow{OP} の回転後のベクトル \overrightarrow{OQ} である。ベクトル $\overrightarrow{UP} = \vec{\mathbf{d}}$ と $\overrightarrow{UQ} = \vec{\mathbf{c}}$ はベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ に垂直であるとする。ベクトルの幾何学的関係

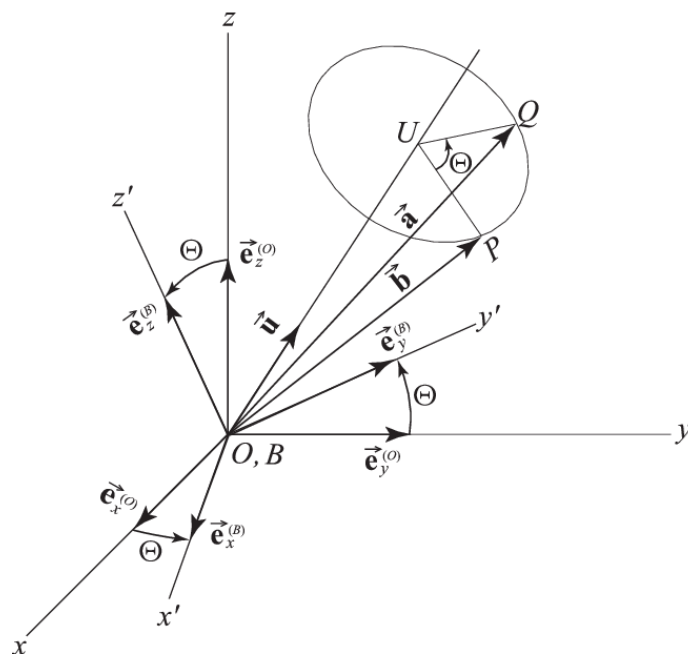


図4.3 基準枠の回転

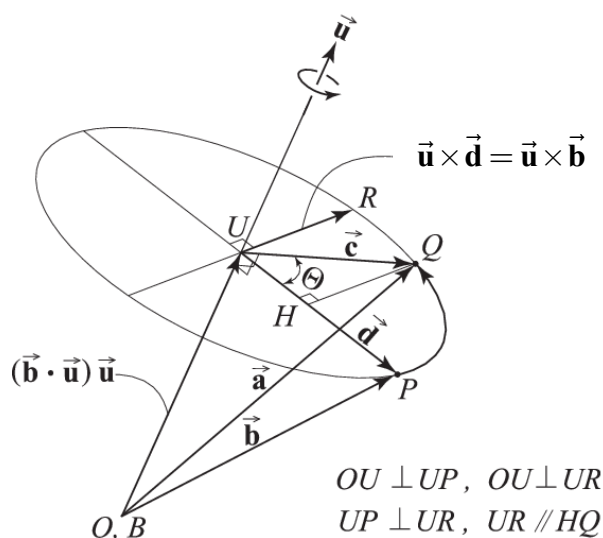


図4.4 物体に固定したベクトルの有限回転

より

$$\vec{a} = \overline{OU} + \overline{UH} + \overline{HQ} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} + \cos\Theta \vec{d} + \sin\Theta(\vec{u} \times \vec{d}) \quad (4.29)$$

$$\vec{b} = \overline{OU} + \overline{UP} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} + \vec{d} \quad (4.30)$$

式(4.29)と(4.30)から \vec{d} を消去すると $\vec{u} \times \vec{d} = \vec{u} \times \vec{b}$ が成り立つから

$$\vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} + \{\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u}\} \cos\Theta + (\vec{u} \times \vec{b}) \sin\Theta \quad (4.31a)$$

となる。図4.4より $\vec{d} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} = -\vec{u} \times \vec{u} \times \vec{b}$ の関係が得られるから式(4.31a)は

$$\vec{a} = \vec{b} + 2(\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{b})) \sin^2 \frac{\Theta}{2} + (\vec{u} \times \vec{b}) \sin\Theta \quad (4.31b)$$

と書ける。

\vec{u} の枠 O の成分表示 \mathbf{u}_o と枠 B の成分表示 \mathbf{u}_B は等しく、これを \mathbf{u} と書く。すなわち

$$\mathbf{u}_o = \mathbf{u}_B \equiv \mathbf{u} \quad (4.32)$$

と書ける。したがって、ベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ を枠 $\{O, \mathbf{e}^{(o)}\}$ の成分で表わすと式(4.31a)より

$$\mathbf{a}_o = (\mathbf{u}^T \mathbf{b}_o) \mathbf{u} + \{\mathbf{b}_o - (\mathbf{u}^T \mathbf{b}_o) \mathbf{u}\} \cos \Theta + (\tilde{\mathbf{u}} \mathbf{b}_o) \sin \Theta \quad (4.33a)$$

式(4.31b)は

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{b}_o + 2(\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{b}_o) \sin^2 \frac{\Theta}{2} + (\tilde{\mathbf{u}} \mathbf{b}_o) \sin \Theta \quad (4.33b)$$

となる。ここで $(\mathbf{u}^T \mathbf{b}_o) \mathbf{u} = \mathbf{u} (\mathbf{u}^T \mathbf{b}_o) = (\mathbf{u} \mathbf{u}^T) \mathbf{b}_o$ と書けるから式(4.33a), (4.33b)は

$$\mathbf{a}_o = \{\mathbf{u} \mathbf{u}^T + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \cos \Theta + \tilde{\mathbf{u}} \sin \Theta\} \mathbf{b}_o \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{a}_o = \left\{ \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \tilde{\mathbf{u}} \sin \Theta \right\} \mathbf{b}_o \quad (4.34b)$$

となる。回転前のベクトル $\vec{\mathbf{b}}$ が、回転してベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ となったのであるから、 $\vec{\mathbf{a}}$ の枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ に対する成分と $\vec{\mathbf{b}}$ の枠 $\{O, \mathbf{e}^{(o)}\}$ に対する成分とは同一である。したがって

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{b}_o \quad (4.35)$$

となる。一方、座標変換の式(4.15)より $\mathbf{a}_B = \mathbf{A}^{BO} \mathbf{a}_o$ であるから

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{b}_o = \mathbf{A}^{BO} \mathbf{a}_o \quad \text{または} \quad \mathbf{a}_o = \mathbf{A}^{OB} \mathbf{b}_o \quad (4.36)$$

式(4.34a)と(4.36)の第2式の比較より座標変換マトリックス \mathbf{A}^{OB} は

$$\mathbf{A}^{OB} = \mathbf{u} \mathbf{u}^T + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \cos \Theta + \tilde{\mathbf{u}} \sin \Theta \quad (4.37a)$$

または式(4.34b)と(4.36)の第2式の比較により

$$\mathbf{A}^{OB} = \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \tilde{\mathbf{u}} \sin \Theta \quad (4.37b)$$

となる。このマトリックスの逆は $\tilde{\mathbf{u}}^T = -\tilde{\mathbf{u}}$ を用いて、式(4.37a)より

$$\mathbf{A}^{BO} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\cos\Theta - \tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \quad (4.38a)$$

または式(4.37b)より

$$\mathbf{A}^{BO} = \mathbf{I}_3 + 2\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}\sin^2\frac{\Theta}{2} - \tilde{\mathbf{u}}\sin\Theta \quad (4.38b)$$

を得る。微小回転の場合には、 Θ を小さな量 $\Delta\theta$ とおいて、式(4.37), (4.38)より

$$\mathbf{A}^{OB} = \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{u}}\Delta\theta \quad (4.39)$$

$$\mathbf{A}^{BO} = \mathbf{I}_3 - \tilde{\mathbf{u}}\Delta\theta \quad (4.40)$$

となる。これを $\mathbf{a}_o = \mathbf{A}^{OB}\mathbf{b}_o$ に代入すると

$$\mathbf{a}_o = (\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{u}}\Delta\theta)\mathbf{b}_o = \mathbf{b}_o + \Delta\theta\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{b}_o \quad (4.41)$$

となる。これを幾何ベクトル表記に戻すと

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} + \Delta\theta\tilde{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \overline{\Delta\theta} \times \vec{\mathbf{b}} \quad (4.42)$$

ただし

$$\overline{\Delta\theta} = \Delta\theta\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.43)$$

とおいた。すなわち微小回転はベクトル $\overline{\Delta\theta}$ として表現される(ベクトル量であることの厳密な証明は文献1)の59ページにある)。これに対して Θ による有限の回転はベクトル量では表わされない。

回転変換は姿勢軸 $\tilde{\mathbf{u}}$ まわりに行われるから \mathbf{u} は $\mathbf{A}(=\mathbf{A}^{OB})$ の変換に対して不変であり、固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルとなっている。すなわち

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (4.44)$$

が成立する。

[補足説明4.3_1] 座標変換マトリックスについての補足講義

補足講義ではショートレクチャーを補足する目的に加えて、発展的な幅広いテーマを扱っている。今回は後者の補足講義である。

第10回ショートレクチャーの[補足説明4.1_1] 座標変換マトリックスの記号の説明では、座標変換マトリックス(回転変換マトリックスまたは回転テンソル)に使用されるいくつかの記号を紹介した。ここではその中で文字 \mathbf{R} を使用する。その理由は、柔軟マルチボディダイナミクス、連続体力学などの変形を扱う領域では、 \mathbf{R} が多用されているからである。特にことわらない限り、この \mathbf{R} は本文の \mathbf{A} と同じ意味である。したがって剛体力学を扱う限りにおいては \mathbf{R} は \mathbf{A} と、 \mathbf{A} は \mathbf{R} と相互におきかえられる。

まず準備として直交射影オペレータ \mathbf{P}_u を説明する。つぎに \mathbf{P}_u を用いて回転変換マトリックス \mathbf{R} を導出する。この導出法は本文で述べた方法とは異なり解析的な方法である。

(1) 直交射影オペレータ \mathbf{P}_u

任意のベクトル $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{a}}$ に対して、ベクトル三重積 (vector triple product) をドット積で表わすと

$$\tilde{\mathbf{u}} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{a}}) = \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}) - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{a}} \Rightarrow (\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{v}})\mathbf{a} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T\mathbf{a} - \mathbf{u}^T\mathbf{v}\mathbf{a} = (\mathbf{v}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{a} \quad (\text{a1})$$

と書ける。

ここで、任意の \mathbf{u} と \mathbf{v} をいずれも単位ベクトル \mathbf{u} とおくと $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$ であるから式 (a1) の右の式は

$$(\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{a} = (\mathbf{u}\mathbf{u}^T - \mathbf{I})\mathbf{a} \quad (\text{a2})$$

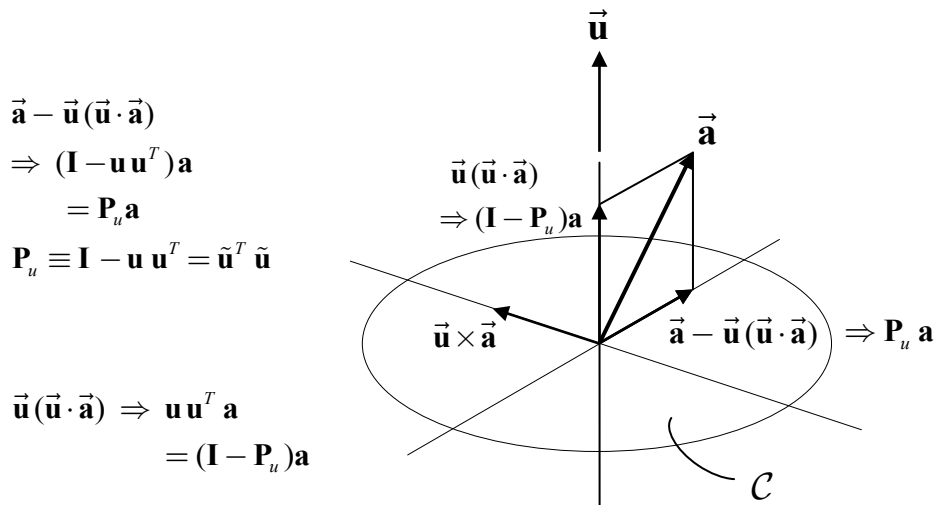
となる。 \mathbf{P}_u を

$$\mathbf{P}_u \equiv \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T = \tilde{\mathbf{u}}^T\tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{b1})$$

と定義すると、式 (a2) は

$$\mathbf{P}_u\mathbf{a} = (\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{a} = (\tilde{\mathbf{u}}^T\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{a} \quad (\text{b2})$$

と書ける。この \mathbf{P}_u は直交射影オペレータ (orthogonal projection operator) と呼ばれる線形変換であり、補図4.3.1において、任意のベクトル $\tilde{\mathbf{a}}$ を単位ベクトル



補図4.3.1 直交射影オペレータ \mathbf{P}_u を導出する図

ル \vec{u} に直交する平面 \mathcal{C} へ射影するベクトルを生成する作用素であることがわかる。したがって $\mathbf{P}_u \mathbf{a}$ は本文の図4.4では、 \vec{b} から成分 $\vec{d} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} = -\vec{u} \times \vec{u} \times \vec{b}$ を計算する演算に対応している。

なお \mathbf{P}_u には次の性質がある。この式は後で使用される。

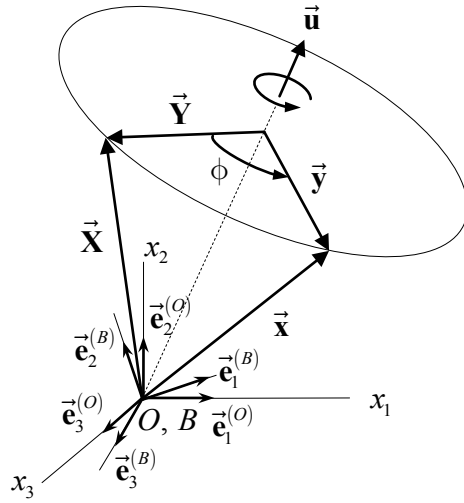
$$\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{P}_u = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \tilde{\mathbf{u}} \quad (c)$$

(2) 回転変換マトリックス \mathbf{R} の性質

ショートレクチャーの本文で述べた方法とは異なる方法により \mathbf{R} マトリックスを導出してみる。ショートレクチャーで述べた方法は標準的であるが、そのほかにもいろいろな方法がある。ここで紹介する⁽¹⁾のはその一つである。

(1) M. Geradin and A. Cardona, Flexible Multibody Dynamics, A Finite Element Approach, John Wiley & Sons, Ltd (2000), p.50-51.

補図4.3.2において物体固定枠 B は回転前には空間に静止する全体枠 O と一致しているとす(二つの枠の原点 O と B は回転後も一致しているとす)。原点 O を通る回転軸 \mathbf{u}



補図4.3.2 物体に固定された有限回転

まわりの物体の回転を考える。補図4.3.2は、はじめ静止している物体に固定されたベクトル \mathbf{X} が原点 O を通る回転軸 \mathbf{u} (単位長さ)まわりに ϕ だけ回転してベクトル \mathbf{x} になった状態を示している。全体枠 O の基底ベクトルを $\mathbf{e}_j^{(O)}$, $j=1,2,3$ とし、物体固定枠 B の基底ベクトルを $\mathbf{e}_j^{(B)}$, $j=1,2,3$ とする。この回転により初期に枠 O と一致していた枠 B と枠 B に固定されている \mathbf{X} は同時に回転して、回転後の新たな枠 B と \mathbf{x} に移動した(補図4.3.2はその状態を示している)。

\mathbf{X} と \mathbf{x} の関係は回転テンソル \mathbf{R} により

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (\text{d1})$$

となる。ここでは矢印のついた幾何ベクトルの代わりに矢印のつかない代数ベクトル(列マトリックス)で表わしている。すなわち \mathbf{x} と $\vec{\mathbf{x}}$ および $\vec{\mathbf{e}}_i^{(O)}$ と $\vec{\mathbf{e}}_i^{(B)}$ に対して

$$\vec{\mathbf{x}} = x_1 \vec{\mathbf{e}}_1^{(O)} + x_2 \vec{\mathbf{e}}_2^{(O)} + x_3 \vec{\mathbf{e}}_3^{(O)} \Rightarrow \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1^{(O)} + x_2 \mathbf{e}_2^{(O)} + x_3 \mathbf{e}_3^{(O)} = \sum_j x_j \mathbf{e}_j^{(O)} \quad (\text{e1})$$

$$\vec{\mathbf{X}} = X_1 \vec{\mathbf{e}}_1^{(B)} + X_2 \vec{\mathbf{e}}_2^{(B)} + X_3 \vec{\mathbf{e}}_3^{(B)} \Rightarrow \mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1^{(B)} + X_2 \mathbf{e}_2^{(B)} + X_3 \mathbf{e}_3^{(B)} = \sum_j X_j \mathbf{e}_j^{(B)} \quad (\text{e2})$$

と書いている。 \mathbf{x} および \mathbf{X} は成分表記で次のようにも定義される。その他のベクトルについても同様である。

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, \quad \mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T \quad (\text{f})$$

回転変換後の基底ベクトル $\mathbf{e}_i^{(B)}$ は回転前の枠 O の基底ベクトル $\mathbf{e}_i^{(O)}$ により

$$\mathbf{e}_i^{(B)} = \mathbf{R}\mathbf{e}_i^{(O)}, \quad i=1,2,3 \quad (\text{g})$$

と書ける。ここで枠 O の基底ベクトルは

$$\mathbf{e}_1^{(O)} = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{e}_2^{(O)} = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad \mathbf{e}_3^{(O)} = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (\text{h})$$

である。

初期の回転前の枠 $B (= \text{枠 } O)$ に対するベクトル \mathbf{X} は

$$\mathbf{X} = \sum_j X_j \mathbf{e}_j^{(O)} \quad (\text{i})$$

と書ける。このベクトルの回転後のベクトル \mathbf{x} は

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{R} \sum_j X_j \mathbf{e}_j^{(O)} = \sum_j X_j \mathbf{R}\mathbf{e}_j^{(O)} \quad (\text{d2})$$

$\mathbf{e}_i^{(O)}$ は回転テンソル \mathbf{R} を用いて式(g)と書けるから

$$\mathbf{x} = \sum_j X_j \mathbf{R}\mathbf{e}_j^{(O)} = \sum_j X_j \mathbf{e}_j^{(B)} \quad (\text{d3})$$

となる。一方、 \mathbf{x} は定義により枠 O に対する成分表示により

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i^{(O)} \quad (\text{d4})$$

と書ける。 \mathbf{x} の成分 x_i は \mathbf{x} と $\mathbf{e}_i^{(O)}$ の内積であるから、式(d3)により

$$x_i = (\mathbf{e}_i^{(O)})^T \mathbf{x} = (\mathbf{e}_i^{(O)})^T \sum_j X_j \mathbf{e}_j^{(B)} = \sum_j (\mathbf{e}_i^{(O)})^T \mathbf{e}_j^{(B)} X_j \quad (\text{d5})$$

ここで

$$R_{ij} = (\mathbf{e}_i^{(O)})^T \mathbf{e}_j^{(B)} \quad (\text{j})$$

とおくと

$$x_i = \sum_j R_{ij} X_j = R_{i1} X_1 + R_{i2} X_2 + R_{i3} X_3 \quad (\text{d6})$$

となる。これより \mathbf{R} は

$$\mathbf{R} = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1^{(O)})^T \mathbf{e}_1^{(B)} & (\mathbf{e}_1^{(O)})^T \mathbf{e}_2^{(B)} & (\mathbf{e}_1^{(O)})^T \mathbf{e}_3^{(B)} \\ (\mathbf{e}_2^{(O)})^T \mathbf{e}_1^{(B)} & (\mathbf{e}_2^{(O)})^T \mathbf{e}_2^{(B)} & (\mathbf{e}_2^{(O)})^T \mathbf{e}_3^{(B)} \\ (\mathbf{e}_3^{(O)})^T \mathbf{e}_1^{(B)} & (\mathbf{e}_3^{(O)})^T \mathbf{e}_2^{(B)} & (\mathbf{e}_3^{(O)})^T \mathbf{e}_3^{(B)} \end{bmatrix} \quad (\text{k})$$

であることが分かる。すなわち \mathbf{R} の要素 $R_{ij} = (\mathbf{e}_i^{(O)})^T \mathbf{e}_j^{(B)}$ は枠 O と枠 B の基底ベクトル間の内積(方向余弦)となっている。

(3) 回転変換マトリックス \mathbf{R} の導出

二つのベクトル \mathbf{X} と \mathbf{x} の間には回転テンソル \mathbf{R} をはさんで

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X}$$

となる性質のあることを見てきた(式(d1))。ベクトル \mathbf{X} を回転軸ベクトル \mathbf{u} と平行なベクトル $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{X}$ と垂直なベクトル (\mathbf{u} に直交する平面 \mathcal{C} への射影ベクトル) $\mathbf{P}_u\mathbf{X}$ に分解すると

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{X} + \mathbf{P}_u\mathbf{X} \quad (11)$$

となる。同様にベクトル \mathbf{x} も分解して

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{x} + \mathbf{P}_u\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{X} + \mathbf{P}_u\mathbf{x} \quad (12)$$

となる。ただし幾何学的に明らかな関係式

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{X} \quad (m)$$

を用いた。この式は \mathbf{X} の \mathbf{u} に平行なベクトルの成分と \mathbf{x} の \mathbf{u} に平行なベクトルの成分が同一であることから、成立する。

射影ベクトルは定義により

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}_u\mathbf{X} \quad (n1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_u\mathbf{x} = \mathbf{P}_u\mathbf{R}\mathbf{X} \quad (n2)$$

となる(補図4.3.2参照)。したがって式(11)と(12)は

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad (13)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{X} + \mathbf{y} \quad (14)$$

この二つの式を比較することにより、二つの式の右辺第一項は等しいから、直交射影成分 \mathbf{y} は直交射影成分 \mathbf{Y} から純粋な回転により得られることが分かる。

これまでに見てきたように幾何ベクトルの $\vec{\mathbf{Y}}$ と $\vec{\mathbf{y}}$ は同一平面 \mathcal{C} 上のベクトルであることから、これらの間には二つのベクトルの外積と内積に関して、次の関係が成立する(補図4.3.2参照)。

$$\vec{\mathbf{Y}} \times \vec{\mathbf{y}} = \|\vec{\mathbf{Y}}\| \|\vec{\mathbf{y}}\| \vec{\mathbf{u}} \sin \phi = \|\vec{\mathbf{Y}}\|^2 \vec{\mathbf{u}} \sin \phi \Rightarrow \vec{\mathbf{Y}} \mathbf{y} = \|\vec{\mathbf{Y}}\|^2 \mathbf{u} \sin \phi \quad (o1)$$

$$\vec{\mathbf{Y}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \|\vec{\mathbf{Y}}\|^2 \cos \phi \Rightarrow \mathbf{Y}^T \mathbf{y} = \|\vec{\mathbf{Y}}\|^2 \cos \phi \quad (o2)$$

この二つの式は係数マトリックスが $\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix}^T$ である (4×3) の連立方程式

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{Y}^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \|\vec{\mathbf{Y}}\|^2 \begin{bmatrix} \mathbf{u} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{Y}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \|\vec{\mathbf{Y}}\|^2 \begin{bmatrix} \mathbf{u} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (p1), (p2)$$

を形成している。式(p1)は一般的に、(p2)のように書ける。式(p2)の解は一般的に

Moore-Penroseの擬似逆マトリックス

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (\text{q})$$

を用いて

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (\text{r})$$

と得られるから、式(p1)の解は

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{Y}^T \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{array} \right] \|\tilde{\mathbf{Y}}\|^2 \begin{bmatrix} \mathbf{u} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \left[\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \right]^{-1} \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{array} \right] \|\tilde{\mathbf{Y}}\|^2 \begin{bmatrix} \mathbf{u} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{s})$$

となる。ここで $\mathbf{Y} = \|\mathbf{Y}\| \mathbf{e}$ と書けるから、

$$\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|^2 (\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \mathbf{e}^T) = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|^2 \mathbf{I} \quad (\text{t})$$

となる。ただし \mathbf{e} は \mathbf{Y} 方向を向く単位ベクトルである。式(s)に(t)を用いると

$$\mathbf{y} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{Y} \cos \phi = (\tilde{\mathbf{u}} \sin \phi + \mathbf{I} \cos \phi) \mathbf{Y} \quad (\text{u1})$$

を得る。よって式(n1)を用いて

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}} \sin \phi + \mathbf{I} \cos \phi) \mathbf{P}_u \mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{u}} \sin \phi + \mathbf{P}_u \cos \phi) \mathbf{X} \quad (\text{u2})$$

となる。ただし式(c)の関係式 $\tilde{\mathbf{u}} \mathbf{P}_u = \tilde{\mathbf{u}}$ を用いた。この式を(14)に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u) \mathbf{X} + \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_u) \mathbf{X} + (\tilde{\mathbf{u}} \sin \phi + \mathbf{P}_u \cos \phi) \mathbf{X} \\ &= [\mathbf{I} - (1 - \cos \phi) \mathbf{P}_u + \tilde{\mathbf{u}} \sin \phi] \mathbf{X} \\ &= [\mathbf{I} + (1 - \cos \phi) \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \sin \phi] \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{15})$$

を得る。ただし式(b1)の性質 $\mathbf{P}_u \equiv \mathbf{I} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T = \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}}$ を用いた。式(d1)より

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X}$$

であるから、この式と式(15)を比較して

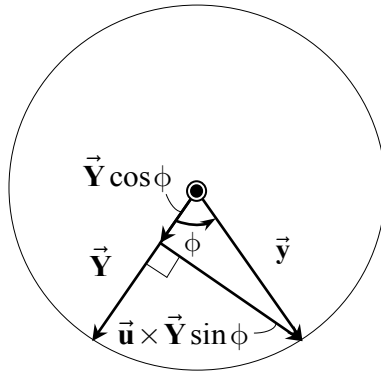
$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + (1 - \cos \phi) \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \sin \phi \quad (\text{v1})$$

$$= \mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \tilde{\mathbf{u}} \sin \phi \quad (\text{v2})$$

$$= \mathbf{u} \mathbf{u}^T + (\mathbf{I} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \cos \phi + \tilde{\mathbf{u}} \sin \phi \quad (\text{v3})$$

と書ける。式(v3)は本文の式(4.37a)と一致する。

解析的に順をおって \mathbf{R} の導出を行ってきたが、補図4.3.2の幾何学的な特性から式(u1)の関係式



補図4.3.3 純粋の有限回転

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}} \sin \phi + \mathbf{I} \cos \phi) \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{Y} \sin \phi + \mathbf{Y} \cos \phi \quad (\text{u1})$$

は直ちに得られる。すなわち補図4.3.3(補図4.3.2を回転軸に沿って上から下方向に見た図)の幾何学的な関係より

$$\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{Y}} \sin \phi + \vec{\mathbf{Y}} \cos \phi \Rightarrow \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{Y} \sin \phi + \mathbf{Y} \cos \phi \quad (\text{w})$$

を得る。この式の第二式は式(u1)そのものである。