SL第14回　SL-MBD(1)_4.5_4章位置と姿勢-回転の角度表現

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第14回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義している。今回はその五回目である。物体の姿勢を表現する具体的な方法には、回転軸回りの回転がある。今回は座標枠を回転して得られる基本回転のマトリックスを学ぶ。　2021.07.28　清水

4. 4 回転の角度表現

4. 4. 1 基本回転

4. 3節では任意の軸 $\vec{\mathbf{u}}$ まわりに枠 O と一致させて置いた枠 B を回転させて新たな枠 B を作り、そのときの座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{BO}$ とその性質を導出した。ここでは、$\mathbf{A}^{BO}$ を、枠を構成する三つの直交軸まわりの3回の回転で実現する方法を述べる。

図4. 5のように、枠 $\left\{O,\mathbf{e}^{(O)}\right\}$ を $\vec{\mathbf{e}}_x{}^{(O)}$ 軸まわりに θ だけ回転させ新たな枠 $\left\{B,\mathbf{e}^{(B)}\right\}$ を作ると

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_x{}^{(B)}&=\vec{\mathbf{e}}_x{}^{(O)}\\ \vec{\mathbf{e}}_y{}^{(B)}&=\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_y{}^{(O)}+\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_z{}^{(O)}\\ \vec{\mathbf{e}}_z{}^{(B)}&=-\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_y{}^{(O)}+\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_z{}^{(O)}\end{aligned}\right\}\tag{4. 45}$$

となる。これより $\mathbf{e}^{(B)}=\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x{}^{(B)} & \vec{\mathbf{e}}_y{}^{(B)} & \vec{\mathbf{e}}_z{}^{(B)}\end{bmatrix}^T$ と $\mathbf{e}^{(O)}=\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x{}^{(O)} & \vec{\mathbf{e}}_y{}^{(O)} & \vec{\mathbf{e}}_z{}^{(O)}\end{bmatrix}^T$ の関係は

$$\mathbf{e}^{(B)}=\mathbf{R}_x\mathbf{e}^{(O)},\qquad \mathbf{R}_x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\tag{4. 46}$$

となる。この $\mathbf{R}_x$ は方向余弦マトリックス $\mathbf{A}^{BO}=\left(\mathbf{A}^{OB}\right)^T$ の特別な場合であり、x 軸まわりの基本回転と呼ばれている。x 軸まわりに回転したことを意味して添え字 x をつけている。同様に y 軸まわり、z 軸まわりの回転角 θ の基本回転マトリックス $\mathbf{R}_y,\mathbf{R}_z$ は

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

となる。$\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ は回転変換マトリックスの特別な場合であり直交マトリックスである。

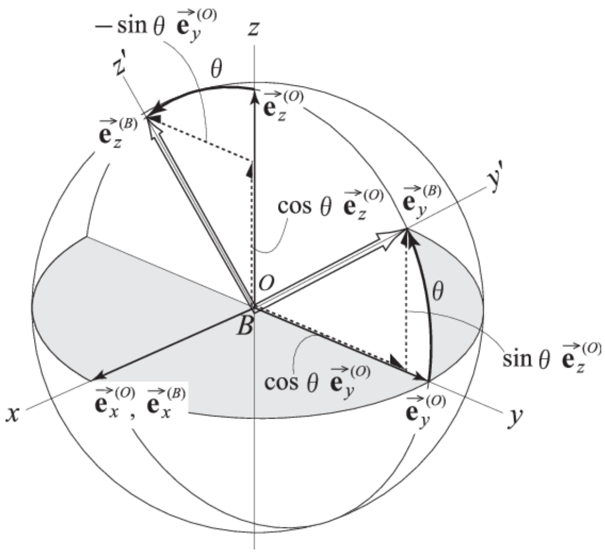

図4.5　x 軸を基準とした回転

[補足説明4.4_1]　基本回転の回転マトリックスと座標変換マトリックスの関係

上で説明した x 軸まわりの基本回転のマトリックス $\mathbf{R}_x$ は式(4.46)、すなわち

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{R}_x \mathbf{e}^{(O)} \tag{a}$$

と書けた。この $\mathbf{R}_x$ の役割は、枠 O の基底ベクトルの組 $\mathbf{e}^{(O)}$ に $\mathbf{R}_x$ を作用させて枠 B の基底ベクトルの組 $\mathbf{e}^{(B)}$ を得ることである。この関係は任意のベクトルに対しても成立する。

一方、任意のベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ を枠 O の基底ベクトルの組 $\mathbf{e}^{(O)}$ で表わした時の座標 $\mathbf{a}_O$ と枠 B の基底ベクトルの組 $\mathbf{e}^{(B)}$ で表わした時の座標 $\mathbf{a}_B$ を

$$\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{e}^{(O)})^T \mathbf{a}_O$$
$$= (\mathbf{e}^{(B)})^T \mathbf{a}_B \tag{b}$$

とするとき、前回までに学んだ座標変換マトリックス $\mathbf{A}^{OB}$ の役割は

$$\mathbf{a}_O = \mathbf{A}^{OB}\mathbf{a}_B \tag{c}$$

により与えられる、ことを学んだ。式(c)より

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{A}^{OB})^T \mathbf{a}_O \tag{d}$$

となる。この関係を x 軸まわりの基本回転に適用した場合の $\mathbf{A}^{OB}$ を $\mathbf{A}_x$ と書くことにすると、

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{A}_x)^T \mathbf{a}_O \tag{e}$$

となる。式(a)と(e)の比較より $\mathbf{R}_x$ と $\mathbf{A}_x$ の間には

$$\mathbf{R}_x = (\mathbf{A}_x)^T \tag{f}$$

の関係がある、ことが分かる。任意の回転に対しても似たような関係式が得られる。これは次回以降に具体的に説明される。