SL第12回　SL-MBD(1)_4.3_4章位置と姿勢-位置と位置ベクトル_3

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)通算第12回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義している。今回はその三回目である。力学において最も基本的な概念の一つに位置がある。この位置とそれを数式で表現するための文字(および記号)と方法とについて基礎事項を学ぶ。　2021.06.24　清水

4.2 位置と位置ベクトル

図4.2のように3次元空間内に点O, Pをとる。この2点を結んだ点間ベクトルを$\vec{\mathbf{r}}^{OP}$と書く。点Pは剛体B上にあるものとする。矢印の始点を全体基準枠$\left\{O, \mathbf{e}^{(O)}\right\}$の原点$O$にとると、この$\vec{\mathbf{r}}^{OP}$は、基準枠$O$から見た剛体$B$上の任意の点$P$の位置を示すベクトルとなる。このように基準枠から見た位置を表わすベクトルを**位置ベクトル**(position vector)と呼ぶ。物体Bのすべての点はこのように全体基準枠により表わされる。この全体基準枠は剛体に固定されていても空間に固定されていてもよい。このとき基準枠$\left\{O, \mathbf{e}^{(O)}\right\}$を**観測者**(observer)と呼ぶ。

$\vec{\mathbf{r}}^{OP}$、$\vec{\mathbf{r}}^{OB}$、$\vec{\mathbf{r}}^{BP}$は幾何ベクトルであり、図4.2より

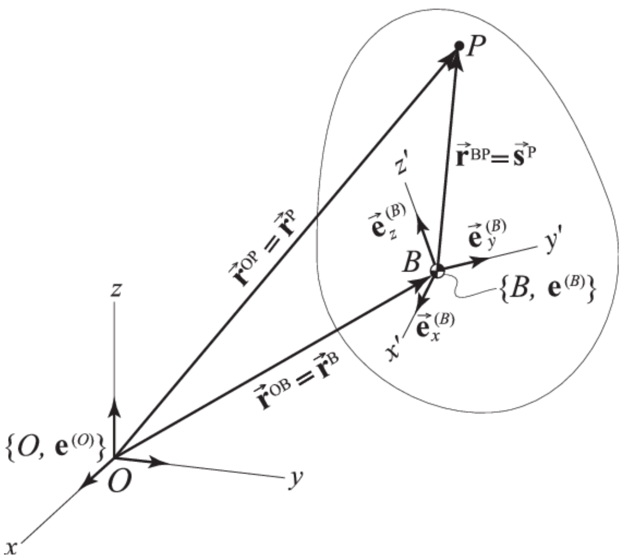

図4.2　物体上の点Pの位置

$$\vec{\mathbf{r}}^{OP} = \vec{\mathbf{r}}^{OB} + \vec{\mathbf{r}}^{BP} \tag{4.22}$$

となる。この $\vec{\mathbf{r}}^{OP}$（$\vec{\mathbf{r}}^{OB}$、$\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ も同様)を任意の基準枠 $\left\{C, \vec{\mathbf{e}}^{(C)}\right\}$ により成分表示し、代数ベクトル(列マトリックス) $\mathbf{r}_C^{OP}$ （$\mathbf{r}_C^{OB}$、$\mathbf{r}_C^{BP}$ も同様)で表すと

$$\mathbf{r}_C^{OP} = \mathbf{e}^{(C)} \cdot \vec{\mathbf{r}}^{OP} \tag{4.23}$$

となる。特に枠 C として全体枠 $O-xyz$ をとるときは $\mathbf{r}_O^{OP}$ となるが簡単に $\mathbf{r}^{OP}$ と書くことにする。すなわち

$$\mathbf{r}^{OP} = \mathbf{e}^{(O)} \cdot \vec{\mathbf{r}}^{OP} \tag{4.24}$$

一方、枠 C を点 P が属する剛体固定枠 $B-x'y'z'$ にとると、これは $\mathbf{r}_B^{OP}$（$\mathbf{r}_B^{OB}$、$\mathbf{r}_B^{BP}$ も同様)となるが、これを $\mathbf{r}'^{OP}$（$\mathbf{r}'^{OB}$、$\mathbf{r}'^{BP}$ も同様)と書くことにする。

$$\mathbf{r}'^{OP} = \mathbf{e}^{(B)} \cdot \vec{\mathbf{r}}^{OP} \tag{4.25}$$

すなわち、$\mathbf{r}^{OP}$（$\mathbf{r}^{OB}$、$\mathbf{r}^{BP}$）はベクトル $\vec{\mathbf{r}}^{OP}$ （$\vec{\mathbf{r}}^{OB}$、$\vec{\mathbf{r}}^{BP}$）を全体枠の成分で表した列マトリックス、$\mathbf{r}'^{OP}$（$\mathbf{r}'^{OB}$、$\mathbf{r}'^{BP}$）はこのベクトルを点 P が属する枠 $B-x'y'z'$ の成分で表した列マトリックスと約束する。さらに、枠 $D-x''y''z''$ の成分で表した列マトリックスは $\mathbf{r}''^{OP}$ などと書くことにする。

$\mathbf{r}^{OP}$ と $\mathbf{r}'^{OP}$（$\mathbf{r}^{OB}$ と $\mathbf{r}'^{OB}$、$\mathbf{r}^{BP}$ と $\mathbf{r}'^{BP}$ も同様)の間には式(4.15)の関係

$$\mathbf{r}^{OP} = \mathbf{A}^{OB}\mathbf{r}'^{OP} \tag{4.26}$$

が成り立つ。ここで $\mathbf{A}^{OB}$ は枠 B から枠 O への座標変換マトリックスである。

One point　幾何ベクトルの基準枠による成分表示と(’)記号

二つの基準枠 O と B があるとする(図4.2参照)。物体 O の基準枠 O に対して物体 B の運動を考える場合には、枠 O が主で枠 B が従の関係にあると考えるとわかりやすい。このとき枠 O に体する物体 B の位置、速度、角速度などは $\vec{\mathbf{r}}^{OB}$、${}^{O}\vec{\mathbf{v}}^{OB}$、$\vec{\boldsymbol{\omega}}^{OB}$ などと書かれる。これを枠 O の成分で表示するときは、代数ベクトルで $\mathbf{r}^{OB}$、

${}^{O}\mathbf{v}^{OB}$ 、$\boldsymbol{\omega}^{OB}$ と書き、枠 B の成分で表示するときは $\mathbf{r}'^{OB}$ 、${}^{O}\mathbf{v}'^{OB}$ 、$\boldsymbol{\omega}'^{OB}$ と書いて区別する。基準となる枠 O の成分には、(') をつけず、枠 B の成分には(') を付して区別している。これらは本来、位置ならば枠 O に対しては $\mathbf{r}_O^{OB}$ 、枠 B に対しては $\mathbf{r}_B^{OB}$ と書いて区別していたものの代用である。このように添え字を簡単化する努力が払われている。

添え字の煩雑さを更に回避するために、全体枠 O から見た点の位置ベクトルに限って $\vec{\mathbf{r}}^{OP}$ を $\vec{\mathbf{r}}^{P}$ 、$\vec{\mathbf{r}}^{OB}$ を $\vec{\mathbf{r}}^{B}$ 、$\mathbf{r}^{OP}$ を $\mathbf{r}^{P}$ 、$\mathbf{r}^{OB}$ を $\mathbf{r}^{B}$ と表し、式(4.22)を列マトリックス表示で

$$\mathbf{r}^{P} = \mathbf{r}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\mathbf{r}'^{BP} \tag{4.27}$$

と書く。物体の位置が空間のどこにあっても、剛体固定枠 B から見れば物体のすべての点は既知の座標となる。したがって物体固定枠 $\left\{B, \mathbf{e}^{(B)}\right\}$ の原点の位置 $\mathbf{r}^{B}$ が全体基準枠 $\left\{O, \mathbf{e}^{(O)}\right\}$ に対してわかれば、剛体のすべての点はこの全体基準枠に対してわかる。

図4.2においてベクトル $\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ の枠 O による成分表示 $\mathbf{r}_O^{BP} = \mathbf{r}^{BP}$ を簡単のために $\mathbf{s}^{P}$ と表わし、ベクトル $\vec{\mathbf{r}}^{BP}$ の点 P が属する枠 B による成分表示 $\mathbf{r}_B^{BP} = \mathbf{r}'^{BP}$ を $\mathbf{s}'^{P}$ と書くことにする。したがって式(4.27)は

$$\mathbf{r}^{P} = \mathbf{r}^{B} + \mathbf{s}^{P} = \mathbf{r}^{B} + \mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^{P} \tag{4.28}$$

と書ける。ここでこれらの代数ベクトルの成分を $\mathbf{r}^{P} = \left[x^{P}\ y^{P}\ z^{P}\right]^{T}$, $\mathbf{r}^{B} = \left[x^{B}\ y^{B}\ z^{B}\right]^{T}$, $\mathbf{s}^{P} = \left[s_x^{P}\quad s_y^{P}\quad s_z^{P}\right]^{T}$, $\mathbf{s}'^{P} = \left[s_x'^{P}\quad s_y'^{P}\quad s_z'^{P}\right]^{T}$ と書くことにする。

[補足説明4.2_1] 位置ベクトルの記号について

本節では位置を表わす方法とそのために用いる記号について学んだ。点 P の位置を幾何ベクトル(矢印の付いたベクトル) $\vec{\mathbf{r}}^{P}$ で表わした。この幾何ベクトルをいろいろな枠を導入して、その成分で表わす方法を学んだ。例えば全体枠 $O-xyz$ の成分表示では　$\mathbf{r}^{P} = \left[x^{P}\ y^{P}\ z^{P}\right]^{T}$ と書いた。同一のベクトル $\vec{\mathbf{r}}^{P}$ を枠 O とは異なる枠 $B-x'y'z'$ の成

分表示では$\mathbf{r}'^P = \left[x'^P\ y'^P\ z'^P\right]^T$と書いて$\mathbf{r}^P$と区別した。当然、成分$x^P, y^P, z^P$と成分$x'^P, y'^P, z'^P$とは互いに異なる。

式(4.28)においてベクトル$\vec{\mathbf{s}}^P$ (図4.2において点Bから点Pに向かうベクトル) を座標成分で記述するとき、枠Oを用いた場合 $\mathbf{s}^P = \left[s_x^P \quad s_y^P \quad s_z^P\right]^T$と書き、枠$B$を用いた場合$\mathbf{s}'^P = \left[s_x'^P \quad s_y'^P \quad s_z'^P\right]^T$と書いた。

このとき座標変換マトリックス$\mathbf{A}^{OB}$は次のような役割を演じる。すなわちベクトル$\mathbf{s}'^P$に対して、左からマトリックス$\mathbf{A}^{OB}$を作用させる(掛ける)と$\mathbf{s}^P$が得られる。この両者の関係を表わすのが

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{A}^{OB}\mathbf{s}'^P$$

である。$\mathbf{s}'^P$が既知の場合に、$\mathbf{A}^{OB}$が分かれば、この式により$\mathbf{s}^P$が求められることを意味している。これに対して$\mathbf{s}^P$が既知の場合には、この逆の演算

$$\mathbf{s}'^P = (\mathbf{A}^{OB})^{-1}\mathbf{s}^P = (\mathbf{A}^{OB})^T\mathbf{s}^P$$

により$\mathbf{s}'^P$が求められる。なお、$(\mathbf{A}^{OB})^{-1} = (\mathbf{A}^{OB})^T$が成立することはSL第10回で説明した。

なお、(‘)のついたベクトル$\mathbf{s}'^P$は局所枠または物質枠による記述などと呼ばれ、(‘)のつかないベクトル$\mathbf{s}^P$は全体枠または空間枠による記述などと呼ばれる。