

今回はSL(short lecture)通算第11回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義する。今回はその二回目である。一つのベクトルを異なる二つの枠から見た時の関係、二つのベクトルの積を二つの枠から見た時の関係などについて調べる。これは二つの物体の運動の関係を調べる時に使われる。 2021.06.10 清水

4.1.2 二つのベクトルと座標変換

つぎにベクトルの変換についてのいくつかの性質を調べる。幾何ベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ の枠 B 、枠 C での成分表示を $\mathbf{a}_B, \mathbf{a}_C$ と書くと、式(2.19)より

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{a}_B = \mathbf{e}^{(C)T} \mathbf{a}_C \quad (4.13)$$

となる。ここで式(4.13)に、 $\mathbf{e}^{(C)T}$ に対する式(4.6b)を用いると

$$\mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{a}_B = \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{A}^{BC} \mathbf{a}_C \quad (4.14)$$

となるから、代数ベクトル $\mathbf{a}_B$ と $\mathbf{a}_C$ の間には

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{A}^{BC} \mathbf{a}_C \quad (4.15)$$

の関係が成り立つ。これは式(4.6a)と同型となっている。

ベクトルの積 $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ と $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ を、 $\vec{\mathbf{a}}$ の枠 B による成分と、 $\vec{\mathbf{b}}$ の枠 C による成分で表わすために、式(4.13) と式(4.6a) より $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^T \mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{a}_B^T \mathbf{A}^{BC} \mathbf{e}^{(C)}$ および $\vec{\mathbf{b}} = \mathbf{e}^{(C)T} \mathbf{b}_C = \mathbf{b}_C^T \mathbf{e}^{(C)}$ となるから

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{a}_B^T \mathbf{A}^{BC} \mathbf{e}^{(C)} \cdot \mathbf{e}^{(C)T} \mathbf{b}_C \stackrel{(2.24)}{=} \mathbf{a}_B^T \mathbf{A}^{BC} \mathbf{b}_C \quad (4.16)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{a}_B^T \mathbf{e}^{(B)} \times \mathbf{e}^{(C)T} \mathbf{b}_C \stackrel{(4.6b)}{=} \mathbf{a}_B^T \mathbf{e}^{(B)} \times \mathbf{e}^{(B)T} \mathbf{A}^{BC} \mathbf{b}_C \stackrel{(2.29)}{=} \mathbf{e}^{(B)T} \tilde{\mathbf{a}}_B \mathbf{A}^{BC} \mathbf{b}_C \quad (4.17)$$

となる。異なる枠のベクトリックスに対するチルダマトリックスの関係を調べる。すなわち $\tilde{\mathbf{e}}^{(B)}$ を $\tilde{\mathbf{e}}^{(C)}$ で表わすことを考えてみると

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(B)} \underset{(2.25)}{=} -\mathbf{e}^{(B)} \times \mathbf{e}^{(B)T} \underset{(4.6a)}{=} -\mathbf{A}^{BC} \mathbf{e}^{(C)} \times \mathbf{e}^{(C)T} (\mathbf{A}^{BC})^T$$

となる。よって

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(B)} = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{e}}^{(C)} (\mathbf{A}^{BC})^T \quad \text{または} \quad \tilde{\mathbf{e}}^{(B)} \mathbf{A}^{BC} = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{e}}^{(C)} \quad (4.18)$$

が成り立つ。任意のベクトルに対する異なる枠のチルダマトリックスの関係を調べよう。式(2.20)より $\mathbf{a}_B = \mathbf{e}^{(B)} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ である。両辺のチルダオペレータをとると

$$\tilde{\mathbf{a}}_B = \tilde{\mathbf{e}}^{(B)} \cdot \vec{\mathbf{a}} \quad (4.19)$$

となる。これに式(4.18)を用いて

$$\tilde{\mathbf{a}}_B = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{e}}^{(C)} (\mathbf{A}^{BC})^T \cdot \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{e}}^{(C)} \cdot \vec{\mathbf{a}} (\mathbf{A}^{BC})^T \underset{(4.19)}{=} \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{a}}_C (\mathbf{A}^{BC})^T$$

となる。したがって、 $\vec{\mathbf{a}}$ を二つの枠で表わした外積オペレータに関する公式

$$\tilde{\mathbf{a}}_B = (\mathbf{A}^{BC} \mathbf{a}_C)^\sim = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{a}}_C (\mathbf{A}^{BC})^T = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{a}}_C \mathbf{A}^{CB} \quad (4.20)$$

および公式

$$\tilde{\mathbf{a}}_B \mathbf{A}^{BC} = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{a}}_C \quad (4.21)$$

を得る。式(4.20)は式(4.18)の第1式と、式(4.21)は式(4.18)の第2式と同型である。これらの式はよく利用される便利な公式である。

[補足説明4.1_2] チルダマトリックスの記号について

チルダマトリックス $\tilde{\mathbf{a}}$ はベクトル $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ により

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

と定義されるマトリックスであることを、すでに学んだ(式(2.30))。このマトリックスは外積オペレータであることも学んだ(式(2.32))。これから学ぶことであるが、力学ではモーメントを計算する時に、外積が利用されるのでチルダオペレータはその時に多用される。さらにモーメントに共役な変位として回転角が用いられるから、回転運動が現れるとこ

ろにはチルダマトリックスが多用され、回転運動の座標変換の計算には、ここで学んだ公式が多く利用される。とくに式(4.20)、 $\tilde{\mathbf{a}}_B = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{a}}_C \mathbf{A}^{CB}$ 、は良く利用される公式であるから、覚えておくと便利である。ベクトル $\mathbf{a}$ の座標変換が $\mathbf{a}_B = \mathbf{A}^{BC} \mathbf{a}_C$ であるのに対して、マトリックス(テンソル) $\tilde{\mathbf{a}}$ の座標変換は $\tilde{\mathbf{a}}_B = \mathbf{A}^{BC} \tilde{\mathbf{a}}_C \mathbf{A}^{CB}$ で与えられる。