

今回はSL(short lecture)第9回目。3章の内容のうち、いろいろな座標とその座標に適した拘束式の求め方について、三回にわたって講義している。今回はその三回目として自然座標と拘束について学ぶ。 2021.05.06 清水

3.6 自然座標と拘束

自然座標(natural coordinates)によるマルチボディシステムの位置と姿勢の記述は、物体に配置した基本点(basic points)と単位ベクトルにより行なう。図3.11は平面2節リンクである。この図により、具体的に自然座標について座標の表わし方と拘束式の立て方を見ていく。このモデルは二つのリンクと二つの回転ジョイントからできている。基本点を点 A, P, B に配置する。点 A が回転ジョイントで固定されているので、座標の数は $(x^P, y^P), (x^B, y^B)$ の四つである。このとき一般化座標は

$$\mathbf{q} = [x^P \quad y^P \quad x^B \quad y^B]^T$$

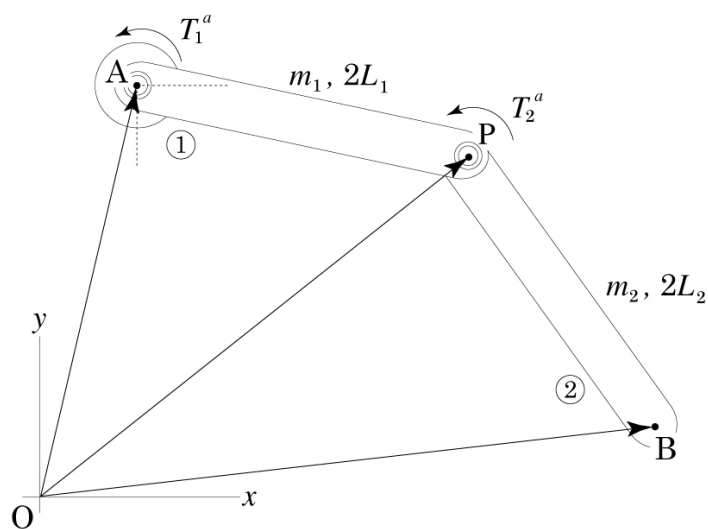


図3.11 平面2節リンク(自然座標系)

となる。

拘束式はつぎの二つである。

$$\begin{cases} (x^A - x^P)^2 + (y^A - y^P)^2 - (2L_1)^2 = 0 \\ (x^P - x^B)^2 + (y^P - y^B)^2 - (2L_2)^2 = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

式(3.32)の二つの拘束式を

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

と書くと、運動方程式は式(3.14)と同形の微分代数方程式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^A \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

となる。そのとき各マトリックス $\mathbf{M}, \mathbf{C}_q$ やベクトル $\mathbf{Q}^A, \boldsymbol{\gamma}$ は、自然座標に適合するように求めなければならない。ここで得れた微分代数方程式のサイズは6であり、一般化座標の数は4、ラグランジュの未定乗数 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x^P \ \lambda_y^P)$ の数は2である。したがって自由度は2である。

[補足説明_1] 自然座標を用いた定式化の特徴

自然座標を用いた定式化は直交座標を用いた拡大法ほど定着はしていないが、自然座標法ではリンクの両端の接続点に基本点を取ることができるため、座標の数を少なく抑えることができる。拘束式の立て方は式(3.32)から分かるように平易であり、入門者にとって理解しやすい。

2次元問題では、方向を指定する単位ベクトルの役割は陽な形で表れていないが、紙面に垂直な z 方向を向いた単位ベクトルが想定されており、回転ジョイントの回転方向を示す。この方向は常に一定であるから意識する必要が無く、式に陽な形で表れてきていないのである。しかし3次元問題では回転ジョイントの回転方向は任意の方向を向くので、この方向を指定する単位ベクトルを定義して定式化に用いる必要がある。

参考文献

[自然座標と拘束についての参考文献には下記の本がある。自然座標がマルチボディダイナミクスの記述に初めて導入されたのは2次元問題に対して1981年、3次元問題に対して1986年で、いずれもJalonによる。下記の本では、いろいろな例題について、自然座標を用いた場合の拘束方程式の立て方と運動方程式の立て方が説明されている。]

- 1) J. G. Jalon and E. Bayo, Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, The Real-Time Challenge, p.16, Springer-Verlag (1994)