SL第10回　SL-MBD(1)_4.1_4章位置と姿勢-座標の変換_1

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)第10回目。4章の位置と姿勢の内容を七回にわたって講義する。物体の動きをあつかうマルチボディダイナミクスでは物体の位置と姿勢を数学的に記述することは必須である。今回はその第一回目として、最も重要な座標の変換について学ぶ。座標の変換は座標変換マトリックスを通して行われる。
2021.05.20　清水

4. 位置と姿勢

この章では物体の位置と姿勢を表す方法について学ぶ。物体の位置は位置ベクトルにより表される。これを具体的に基準枠を導入して座標により表す方法を学ぶ。物体の姿勢は物体に埋め込まれた基準となるベクトルと、このベクトル回りの回転により表される。この回転による物体の姿勢を表す方法を学ぶ。これらの準備としてまず座標変換について、つぎに回転の表現方法としてオイラーパラメータ角について学ぶ。

4. 1　座標の変換

4. 1. 1 座標変換マトリックスとその性質

図4. 1のように二つの直交基準枠 $\{B,\mathbf{e}^{(B)}\}$ と $\{C,\mathbf{e}^{(C)}\}$ を考える。一般性を失わずに二つの枠の原点は同一点にあるとすることができる。枠 C の基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}, \vec{\mathbf{e}}_y^{(C)}, \vec{\mathbf{e}}_y^{(C)}$ を枠 B の基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}, \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}, \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}$ で表すと

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)} &= a_{11}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + a_{21}\vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + a_{31}\vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \\
\vec{\mathbf{e}}_y^{(C)} &= a_{12}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + a_{22}\vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + a_{32}\vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \\
\vec{\mathbf{e}}_z^{(C)} &= a_{13}\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + a_{23}\vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + a_{33}\vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}
\end{aligned}
\tag{4. 1}
$$

と書ける。これは式(2. 17)のベクトリックスを用いると簡潔に

$$
\mathbf{e}^{(C)} = \mathbf{A}^{CB}\mathbf{e}^{(B)}, \qquad \mathbf{A}^{CB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4. 2a}
$$

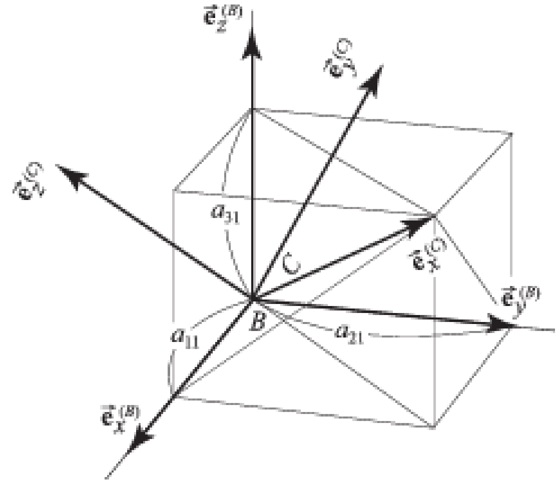

図4.1　二つの基底ベクトルの組
$\mathbf{e}^{(B)}$ と $\mathbf{e}^{(C)}$

と書ける。ここで $\mathbf{e}^{(B)}$, $\mathbf{e}^{(C)}$ は枠 B, C のベクトリックス、$\mathbf{A}^{CB}$ はベクトリックス $\mathbf{e}^{(B)}$ を $\mathbf{e}^{(C)}$ に変換する (3×3) のマトリックスであり、**座標変換マトリックス**と呼ばれる。その要素は a_{ji} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ である。

$\mathbf{A}$ には特別な性質がある。式(2. 24)より $\mathbf{e}^{(C)}\cdot\mathbf{e}^{(C)T}=\mathbf{e}^{(B)}\cdot\mathbf{e}^{(B)T}=\mathbf{I}_3$ であるから式(4. 2a)を用いると

$$\mathbf{e}^{(C)}\cdot\mathbf{e}^{(C)T}=\left(\mathbf{A}^{CB}\mathbf{e}^{(B)}\right)\cdot\left(\mathbf{A}^{CB}\mathbf{e}^{(B)}\right)^T=\mathbf{A}^{CB}\mathbf{e}^{(B)}\cdot\mathbf{e}^{(B)T}\left(\mathbf{A}^{CB}\right)^T=\mathbf{A}^{CB}\left(\mathbf{A}^{CB}\right)^T=\mathbf{I}_3$$

これより

$$\mathbf{A}^{CB}\left(\mathbf{A}^{CB}\right)^T=\mathbf{I}_3 \tag{4. 3}$$

すなわち、次式を得る。

$$\left(\mathbf{A}^{CB}\right)^T=\left(\mathbf{A}^{CB}\right)^{-1} \tag{4. 4}$$

$\mathbf{A}$ にはさらに次の性質がある。式(4. 2a)に左から $\left(\mathbf{A}^{CB}\right)^{-1}$ を掛けると、式(4. 4)の性質を利用して

$$\mathbf{e}^{(B)} = \left(\mathbf{A}^{CB}\right)^T \mathbf{e}^{(C)} \tag{4.5}$$

となる。一方、変換マトリックスの性質から

$$\mathbf{e}^{(B)} = \mathbf{A}^{BC}\ \mathbf{e}^{(C)} \tag{4.6a}$$

である。式(4.5)、(4.6a)および(4.4)より

$$\mathbf{A}^{BC} = \left(\mathbf{A}^{CB}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{CB}\right)^{-1} \tag{4.7}$$

となる。これらの性質を用いると式(4.5)により次式を得る。

$$\mathbf{e}^{(C)T} = \mathbf{e}^{(B)T}\mathbf{A}^{BC} \tag{4.6b}$$

式(4.7)より、$\mathbf{A}^{BC}$ は**直交正規マトリックス**(orthonormal matrix)であることがわかる。また式(4.7)より、$\mathbf{e}^{(C)}$ を $\mathbf{e}^{(B)}$ に変換するマトリックス $\mathbf{A}^{BC}$ は $\mathbf{e}^{(B)}$ を $\mathbf{e}^{(C)}$ に変換するマトリックス $\mathbf{A}^{CB}$ の転置マトリックスで表されることがわかる。直交正規マトリックス $\mathbf{A}^{BC}$ の性質は、次の六つのマトリックスの要素の関係

$$a_{k1}\, a_{l1} + a_{k2}\, a_{l2} + a_{k3}\, a_{l3} = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$

で表すことができる。したがって、九つのマトリックスの要素 a_{ij} のうち、独立なものは三つだけである。式(4.6a)より $\mathbf{A}^{BC}$ は

$$\mathbf{A}^{BC} = \mathbf{e}^{(B)} \cdot \mathbf{e}^{(C)T} \tag{4.9}$$

となる。これは $\mathbf{A}^{BC}$ の一つの定義であり、$\mathbf{A}^{CB}$ の成分 a_{ji} を用いて

$$\mathbf{A}^{BC} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] \tag{4.2b}$$

と書ける。

座標変換マトリックスは、両枠 B, C を意識しないときには $\mathbf{A}^{BC}$ を単に $\mathbf{A}$ と表す。この $\mathbf{A}$ は図4.1に示すように枠 B と枠 C の間の方向余弦マトリックスである。内積は $\vec{\mathbf{e}}_i^{(B)} \cdot \vec{\mathbf{e}}_j^{(C)} = \cos\theta\left(\vec{\mathbf{e}}_i^{(B)}, \vec{\mathbf{e}}_j^{(C)}\right)$ であるから、$i = 1\ (= x),\ 2\ (= y),\ 3 (= z)$;
$j = 1\ (= x),\ 2\ (= y),\ 3\ (= z)$ とすると

$$\vec{\mathbf{e}}_i^{(B)} \cdot \vec{\mathbf{e}}_j^{(C)} = \vec{\mathbf{e}}_i^{(B)} \cdot \left(a_{1j}\, \vec{\mathbf{e}}_x^{(B)} + a_{2j}\, \vec{\mathbf{e}}_y^{(B)} + a_{3j}\, \vec{\mathbf{e}}_z^{(B)} \right) = a_{ij} \tag{4.10}$$

となり、$\mathbf{A}$ の成分 a_{ij} は枠 B と枠 C の $\boldsymbol{i}$ 軸と j 軸のなす角 $\theta\left(\vec{\mathbf{e}}_i^{(B)}, \vec{\mathbf{e}}_j^{(C)}\right)$ の cos の値に等しい。この $\mathbf{A}$ は枠 C から枠 B への座標変換マトリックスを表している。

$\mathbf{A}^{BC}$ にはさらに次の性質がある。図4.1から分かるように、$\vec{\mathbf{e}}_x^{(B)}$, $\vec{\mathbf{e}}_y^{(B)}$, $\vec{\mathbf{e}}_z^{(B)}$ の枠 B における成分は $\mathbf{e}_{xB}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{e}_{yB}^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{e}_{zB}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ であるから、枠 C の基底ベクトル $\vec{\mathbf{e}}_x^{(C)}$, $\vec{\mathbf{e}}_y^{(C)}$, $\vec{\mathbf{e}}_z^{(C)}$ の枠 B での成分 $\mathbf{e}_{xB}^C$, $\mathbf{e}_{yB}^C$, $\mathbf{e}_{zB}^C$ は式(4.1)より

$$\mathbf{e}_{xB}^C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{e}_{yB}^C = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{e}_{zB}^C = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}^T$$

となり、マトリックス $\mathbf{A}^{BC}$ は式(4.2b)より

$$\mathbf{A}^{BC} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xB}^C & \mathbf{e}_{yB}^C & \mathbf{e}_{zB}^C \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

と書けることが分かる。

座標変換マトリックスの性質として次の性質も重要である。座標変換をつぎつぎと行うことは、一気に行うことと等価である。すなわち

$$\mathbf{e}^{(D)} = \mathbf{A}^{DC}\mathbf{e}^{(C)}, \quad \mathbf{e}^{(C)} = \mathbf{A}^{CB}\mathbf{e}^{(B)}, \quad \mathbf{e}^{(D)} = \mathbf{A}^{DB}\mathbf{e}^{(B)}$$

となるから

$$\mathbf{A}^{DB} = \mathbf{A}^{DC}\mathbf{A}^{CB} \tag{4.12}$$

となる。

[補足説明4.1_1] 座標変換マトリックスの記号について

座標変換マトリックスは回転変換マトリックスとも呼ばれる。座標変換マトリックスを本書では $\mathbf{A}$ と書いた。動力学の参考書でどのような文字がつかわれているかを調べてみた。Goldsteinは古典力学(Classical Mechanics)[1]の本で座標変換マトリックスを変換マトリックス(matrix of transformation)と呼び、文字(記号) $\mathbf{A}$ を使っている。Shabana[2]はマトリックス $\mathbf{A}$ を使っている。この他に、多くの本[3],[4]で、文字 $\mathbf{A}$ が使用さ

れている。これに対して文字 **R** も多くの書物[5],[6]で使われている。Bauchau[5]は **R** と同じ記号として $\underline{\underline{R}}$ を用いている(下に二重線はマトリックスの意味として使用している)。この他に多くの論文でいろいろな記号が使われている。その中の一つにSimoら[7]が使用した記号 **Λ** (ギリシャ文字の大文字のラムダ)がある。

参考書

(1) ゴールドシュタイン、瀬川富士、矢野忠、江沢康生訳、古典力学(上、下)、吉岡書店、1992年2月第5刷 (初版1983年8月)

(2) A. A. Shabana, Dynamics of Multibody Systems, 2nd Edition, Cambridge University Press (1998)

(3) E. J. Haug, Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems /Volume l, Basic Methods, Ally and Bacon (1989)

(4) P. E. Nikravesh, Computer Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice-Hall (1988)

(5) O. A. Bauchau, Flexible Multibody Dynamics, Springer (2011)

(6) M. Geradin and A. Cardona, Flexible Multibody Dynamics, A Finite Element Approach, John Wiley & Sons, Ltd (2000)

(7) J.C. Simo, A Finite Strain Beam Formulation. The Three-dimensional Dynamic Problem. Part I, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 49 (1985), pp.55-70, and J. C. Simo and A Three-dimensional Finite-strain Rod Model. Part II, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58 (1986), pp.79-116