SL第8回　SL-MBD(1)_3.4_3章座標と拘束式と自由度の基礎-いろいろな座標_2

もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

今回はSL(short lecture)第8回目。3章の内容のうち、いろいろな座標とその座標に適した拘束式の求め方について、三回にわたって講義している。今回はその二回目として、相対座標と拘束について学ぶ。　2021.04.22　清水

3.5　相対座標と拘束

相対座標(relative coordinates)によるマルチボディシステムの運動の記述は従属変数を消去するのに役立つ。この座標系により方程式を再帰的に書く場合には、これを再帰方程式(recursive equation)と呼ぶ。物体の方程式を記述する際に拘束条件を考慮して、ある物体に対して連結されている他の物体を相対座標を用いて表わすために、導かれた方程式は一般に独立変数のみの方程式となる。詳しくは14章で述べる。

図3.10のような平面2節リンクを考える。物体2の位置と回転姿勢を、物体1の位置と回転姿勢および相対座標で表すことを考える。物体2の位置を(x_2, y_2)、物体1のそれを(x_1, y_1)とすると

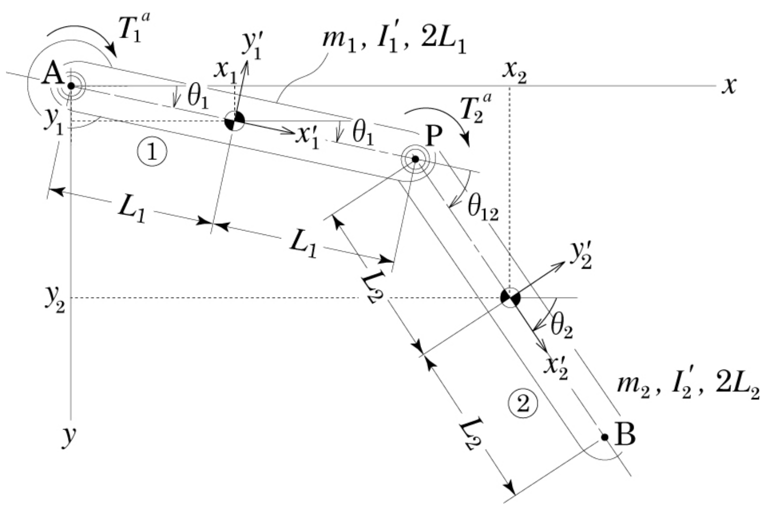

図3.10　平面2節リンク(相対座標系)

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

となる[式(3.11)参照]。ここで物体1と2の回転姿勢をθ_1, θ_2とすると

$$\theta_2 = \theta_1 + \theta_{12} \tag{3.16}$$

となる。θ_{12}は相対回転角で、相対座標である。式(3.15)を時間で微分すると速度方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1\sin\theta_1 \\ L_1\cos\theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -L_2\sin\theta_2 \\ L_2\cos\theta_2 \end{bmatrix} \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_{12}\right) \tag{3.17}$$

を得る。これをつぎのように書く。

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{B}_{12}\mathbf{v}_1 + \mathbf{G}_{12}\dot{\theta}_{12} \tag{3.18a}$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2), \qquad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2\right) \\ 0 & 1 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} -L_2\sin\theta_2 \\ L_2\cos\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.18b}$$

式(3.18a)を再度、時間で微分すると加速度方程式

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{B}_{12}\dot{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{G}_{12}\ddot{\theta}_{12} + \mathbf{H}_{12} \tag{3.19a}$$

を得る。ここで

$$\mathbf{H}_{12} = \dot{\mathbf{B}}_{12}\mathbf{v}_1 + \dot{\mathbf{G}}_{12}\dot{\theta}_{12} \tag{3.19b}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + L_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) \\ 0 & 0 & -\left(L_2\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + L_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{G}}_{12} = \begin{bmatrix} -L_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ -L_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.19c}$$

拘束式の変分は、$\delta\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \delta x_i & \delta y_i & \delta\theta_i \end{bmatrix}^T \quad (i=1,2)$とおくと式(3.18a)を参考に、

次式となる。

$$\delta \mathbf{Z}_2 = \mathbf{B}_{12}\delta \mathbf{Z}_1 + \mathbf{G}_{12}\,\delta\theta_{12} \tag{3.20}$$

物体1を基本となるベースボディとする。ベースボディである物体1の左端は回転ジョイントで固定され、物体1と物体2は回転ジョイントで結合されている。変分運動方程式は

$$\delta \mathbf{Z}_1^T \left(\mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{Q}_1\right) + \delta \mathbf{Z}_2^T \left(\mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{Q}_2\right) = 0 \tag{3.21}$$

となる。ここで $\mathbf{M}_i = \mathrm{diag}\left(m_i \quad m_i \quad J_i'\right)$、$\mathbf{Q}_i$ は外力である。$\delta \mathbf{Z}_i$ はジョイント $\boldsymbol{i}$ で拘束方程式に対して運動学的に許容されるものでなければならない。

式(3.21)に(3.19a)と(3.20)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Z}_1^T \left(\mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{Q}_1\right) + \delta \mathbf{Z}_1^T &\left\{\mathbf{B}_{12}^T \mathbf{M}_2 \left(\mathbf{B}_{12}\dot{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{G}_{12}\,\ddot{\theta}_{12} + \mathbf{H}_{12}\right) - \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{Q}_2\right\} \\ &+ \delta\theta_{12}\left\{\mathbf{G}_{12}^T \mathbf{M}_2 \left(\mathbf{B}_{12}\dot{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{G}_{12}\,\ddot{\theta}_{12} + \mathbf{H}_{12}\right) - \mathbf{G}_{12}^T \mathbf{Q}_2\right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

を得る。ここで $\delta\theta_{12}$ は任意であるから、$\delta\theta_{12}$ の係数を0とおいて

$$\ddot{\theta}_{12} = -\left(\mathbf{G}_{12}^T\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{G}_{12}\right)^{-1}\left(\mathbf{G}_{12}^T\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{B}_{12}\dot{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{G}_{12}^T\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{H}_{12} - \mathbf{G}_{12}^T\,\mathbf{Q}_2\,\right) \tag{3.23}$$

を得る。これを式(3.22)に代入して $\ddot{\theta}_{12}$ を消去すると

$$\delta \mathbf{Z}_1^T \left\{\left(\hat{\mathbf{M}}_1 + \mathbf{M}_1\right)\dot{\mathbf{v}}_1 - \left(\hat{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{Q}_1\right)\right\} = 0 \tag{3.24a}$$

の形の変分運動方程式を得る。ここで

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_1 &= \mathbf{B}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{G}_{12}\left(\mathbf{G}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{G}_{12}\right)^{-1}\mathbf{G}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{B}_{12} \\ \hat{\mathbf{Q}}_1 &= \mathbf{B}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{G}_{12}\left(\mathbf{G}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{G}_{12}\right)^{-1}\left(\mathbf{G}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{H}_{12} - \mathbf{G}_{12}^T\mathbf{Q}_2\right) - \mathbf{B}_{12}^T\mathbf{M}_2\mathbf{H}_{12} + \mathbf{B}_{12}^T\mathbf{Q}_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.24b}$$

である。物体1の点 A は回転ジョイントで固定されているから、$\left(x_1, y_1, \theta_1\right)$ は θ_1 により

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 \\ L_1 \sin\theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

と表される。式(3.25)の時間微分および変分は

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{G}\dot{\theta}_1 \tag{3.26}$$

および

$$\delta\mathbf{Z}_1^T = \mathbf{G}^T \delta\theta_1 \tag{3.27}$$

である。ここで $\mathbf{G}$ は式(3.25)からつぎのように求められる。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 \\ L_1 \cos\theta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

式(3.26)の時間微分は

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{G}\ddot{\theta}_1 + \dot{\mathbf{G}}\dot{\theta}_1 \tag{3.29}$$

である。式(3.27)と(3.29)を(3.24a)に代入し、$\delta\theta_1$ が任意であることから

$$\mathbf{M}\ddot{\theta}_1 + \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{G}}\dot{\theta}_1 = \mathbf{Q} \tag{3.30}$$

を得る。ただし

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{M}}\mathbf{G} \quad , \quad \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}_1 + \mathbf{M}_1 \quad , \quad \mathbf{Q} = \mathbf{G}^T\left(\hat{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{Q}_1\right) \tag{3.31}$$

式(3.30)は、二つの物体の運動を物体1にまとめた運動方程式である。物体1を基準として、これに対し物体2を相対座標で表わし、最終的に一つにまとめた。二つの間の相対的な関係は物体が多くなっても隣接する二つの物体間において成立する。先端の物体からつぎつぎに伝達させて、最終的には一つの基準となるベースボディまでたどり着く。この得られた運動方程式は、従属自由度を含まない微分方程式(この場合 θ_1 のみの方程式)となる。したがって、直交座

標による拡大法に対し、座標の数と方程式の数を著しく低減させて解を求めることができる。

[補足説明_1] 相対座標を用いた運動方程式の定式化の特徴

相対座標を用いた定式化では、直交座標を用いた拡大法に比べて、座標の数が著しく少なくなる。最終的に、問題の自由度と同じ数の独立変数の微分方程式にまとめあげられ、常微分方程式を解くための数値積分法が利用可能となる。変数の数が少ない分だけ計算時間は低減する。直列系や木構造系の問題には特に適している。一方、一般のマルチボディダイナミクスのように網目構造系の問題では、有利さは低下する。プログラミングは、網目構造系の接続状態のトポロジーを、反映することが必要となるために、比較的込み入ってくる。再帰法と呼ばれる方法はこの分類に属する方法である。再帰法による汎用の解析ソフトも開発されており、一般にその有利さが認められている。