もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

このSL(short lecture)では，3章の内容のうち一般化座標と自由度および拘束について学ぶ。拘束については数学的な定義と機械系に現れる具体的な機構の例を学ぶ。　2021.03.11　清水

3章の概要

物体の運動を数学的に表すために座標系と座標が導入される。物体に拘束がない場合とある場合では運動の状況が異なる。これを学ぶことが本レクチャーの最終目標である。そのための準備として運動を記述する座標、拘束される変数、自由に変化することのできる変数などについて学ぶ。さらに、拘束の具体例とその役割を紹介する。

3. 座標と拘束式と自由度の基礎

物体の運動を記述するには座標(coordinates)が必要である。このことは2章で述べた。多くの物体がたがいに関与し合うときには、拘束式がその関与の仕方を記述する。拘束式の導入により物体の自由度は低減する。マルチボディシステムを定式化するにあたって、適切な座標とパラメータの組を選定するのはきわめて大切なことである。本章では、多様な座標のとり方の中で、物体の運動方程式(equations of motion)と拘束式(constraints)を容易に記述するような座標にはどのようなものがあるかを概観する。

3.1 拘束のない系の一般化座標と自由度

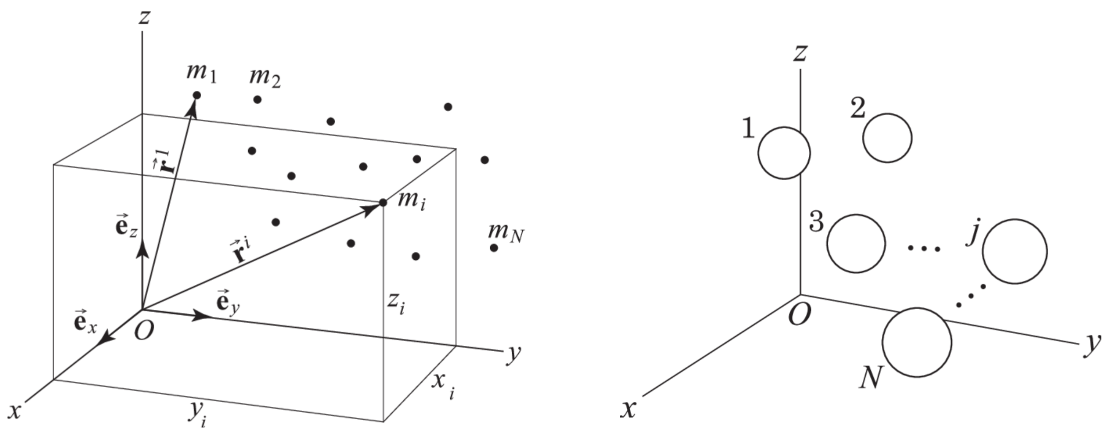
剛体系の説明の前に、質点系を考える。3次元空間内の一つの質点の位置は三つの物理座標で記述される。系を記述するための最小の独立な座標の数を(位置的)自由度という。拘束のない一つの質点の自由度は3である。図3.1(a)のような N 質点系では、系を記述するため $3N$ 個の物理座標が必要であるから自由度は $3N$ である。 i 番目の質点の位置ベクトルを $\vec{\mathbf{r}}^i = \vec{\mathbf{r}}^i(x_i\,, y_i\; z_i)$ とすると

$$\vec{\mathbf{r}}^i = x_i\vec{\mathbf{e}}_x + y_i\vec{\mathbf{e}}_y + z_i\vec{\mathbf{e}}_z \quad , \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{3.1}$$

と書ける。ここで新しい変数の組 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ を導入する。物理座標との間に

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \\ y_i &= y_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \\ z_i &= z_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

の関係があるとする。$q_1, q_2, \cdots, q_n$ が系の位置を完全に記述するならば、これを



(a)　N 質点系　　　(b)　N 剛体系

図3.1　多質点系と多剛体系

一般化座標(generalized coordinates)と呼んで物理座標 x_i, y_i, z_i と区別する。

3次元空間の一つの剛体の位置の情報は、4章で説明するように三つの位置座標と三つの角度座標で表される。したがって、一つの剛体の(位置的)自由度は6である。図3.1(b)の拘束のない剛体系では自由度は $6N$ である。

3.2 拘束

マルチボディシステムにおける拘束は物体間の接続によって行われる。拘束は拘束方程式により記述される。拘束によって拘束力が発生する。拘束力は反力ともいわれる。図3.2において質点が十分滑らかな

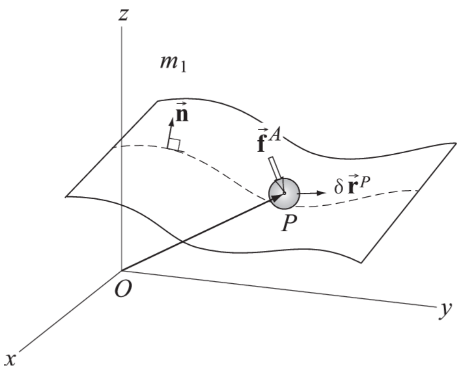
$$c(x, y, z, t) = 0 \tag{3.3a}$$

で表される形状の床面を移動するものとする。これは質点の拘束方程式である。

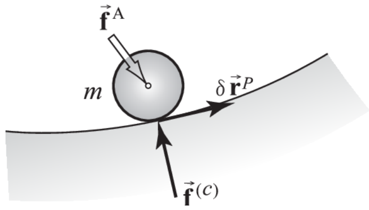
n 個の一般化座標により表される系において、拘束方程式は

$$c\left(q_1, q_2, \cdots, q_n, t\right) = 0 \tag{3.3b}$$

と表される。式(3.3a) , (3.3b)で与えられる拘束方程式を、幾何学的な拘束



(a)　拘束曲面と質点



(b)　質点に作用する力と仮想変位

図3.2　幾何学的拘束の例と拘束反力および仮想変位

(geometrical constraints)または配位拘束(configuration constraints)という。これは位置拘束ともいわれる。式(3.3b)の c の全微分は、パフ形式(Pfaffian form)の拘束式と呼ばれ

$$dc = \frac{\partial c}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial c}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial c}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial c}{\partial t} dt = 0 \tag{3.4}$$

の形に書ける。これを dt で割ると速度拘束式(velocity constraints)または運動拘束式(motion constraints)と呼ばれる

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial c}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial c}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \tag{3.5}$$

を得る。 n 個の一般化座標を有する系に対して m 個の拘束式がある場合には、拘束式は一般に

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, \dot{q}_k + c_{j0} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{3.6}$$

と書ける。係数はいずれも一般化座標と時間の関数である。m 個の拘束式があ

るため、n個の一般化座標は互いに独立ではなくなる。拘束式の数と一般化座標の数の関係については、3.3節で説明する。

一般化座標の時間微分は一般化速度であり、$\dot{q}_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$と書かれる。一般化座標と一般化速度で張られる$2n$次元の空間は状態空間と呼ばれる。

[例題3.1]　図3.3のように枠$O-xyz$をとり、この枠内において質量m_1とm_2から成る摩擦のない系を考える。質量m_1は水平の平板上に置かれている。質量m_1と質量m_2はひもでつながれている。平板と質量m_2を結ぶひもは直交している。原点Oは孔の中央にとられている。質量m_1の位置を(x_1, y_1)で表わす。質量m_2の位置はzの負方向にz_2である。ひもの長さを一定$(=L)$とするとこの系は2自由度である。独立な一般化座標を$\mathbf{q}=[q_1, q_2]^T=[r,\theta]^T$と選ぶ。全体配位ベクトルは枠$O-xyz$の成分表示で$\mathbf{r}=[x_1, y_1, z_2]^T$である。物理座標と一般化座標の関係は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta = q_1\cos q_2 \\
y_1 &= r\sin\theta = q_1\sin q_2 \\
z_2 &= r-L = q_1-L
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

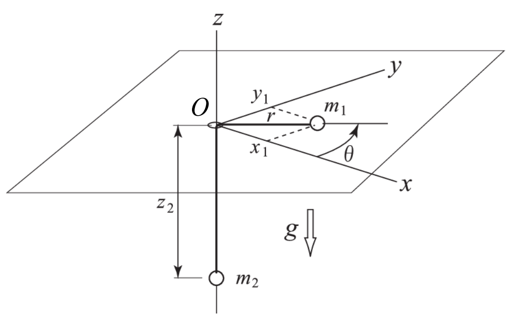
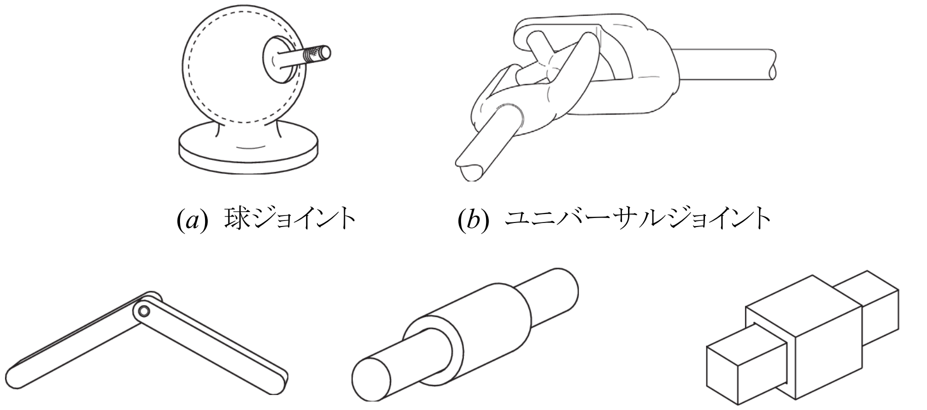


図3.3　2 質点系の例題

配位拘束で表わされる拘束は速度形式の表現も含めてホロノミック(holonomic)であると言う。ホロノミック拘束の中で時間を陽に含まない拘束式は、$c_j(q_1, q_2, \cdots, q_n)=0$の形に書ける。これをスクレロノミック(scleronomic)な拘束という。これに対して時間を陽に含む拘束(式(3.3b)など)をレオノミック(rheonomic)な拘束という。

[例題3.2]　図3.4に機構の接続を表すジョイントの例を示す。これらは配位拘束であり8章にそれらの拘束式が与えられている。



(a) 球ジョイント　(b) ユニバーサルジョイント

(c) 回転ジョイント　(d) 円柱ジョイント　(e) スライダージョイント

図 3.4 種々のジョイントのタイプの例

これに対して、ホロノミックでない拘束をノンホロノミック(nonholonomic)な拘束という。ノンホロノミック拘束の一つにシンプルノンホロノミック拘束(simple nonholonomic constraints)がある。これは拘束式が式(3.6)の形で書けるが、これを対応する式(3.3b)の形に積分できないため、拘束面が定義できない。このときは$q_k(t)$と$\dot{q}_k(t)$　$(k=1,2,\cdots,n)$で張られる空間での曲面を考える。この拘束は運動拘束である。以上をまとめると、拘束の分類は図3.5のようになる。

- 拘束
  - ホロノミック拘束（配位拘束）
    - スクレロミック拘束
    - レオノミック拘束
  - ノンホロノミック拘束
    - シンプルノンホロノミック拘束（運動拘束）
    - その他のノンホロノミック拘束

図3.5　拘束の分類

3.3　拘束のある系の一般化座標と自由度および座標の選定

3.2節で説明したように、拘束には配位拘束と運動拘束がある。まず配位拘束について考えてみる。式(3.3b)の形の拘束方程式が成り立つ。一般に N 質点系において、拘束がない場合には座標の数は $n=3N$ であるから、m 個の(配位)拘束の方程式がある場合には、系の状態は $p\ (=n-m=3N-m)$ 個の独立な一般化座標 q_k, $(k=1,2,\cdots,p)$ で一義的に記述される。N 剛体系では座標の数は $n=6N$ であるから、m 個の(配位)拘束方程式がある場合には、系の状態は $p=6N-m$ で一義的に記述される。このとき p は系の(位置的)自由度(positional degree of freedom)といわれ、系を一義的に記述するために必要な座標の数と定義される。独立でない一般化座標は拘束一般化座標、従属一般化座標などと呼ばれる。

シンプルノンホロノミック拘束の拘束式は速度形式で式(3.6)の形に表されるが、積分して式(3.3b)の形には書けない。拘束がない場合に座標の数が n の系を考えてみよう。N 質点系では $n=3N$、N 剛体系では $n=6N$ である。このとき m_c 個の配位拘束と m_v 個の運動拘束が付与された系を考えよう。m_c 個の配位拘束があるから位置的自由度 p_c は $p_c=n-m_c=3N-m_c$ である。一方運動的自由度 p_v は $p_v=p_c-m_v=n-(m_c+m_v)=3N-(m_c+m_v)$ である。N 剛体系では $p_c=6N-m_c \quad p_v=6N-(m_c+m_v)$ となる。

One point　独立と従属、幾何拘束と運動拘束について

多くの物体が運動していても、互いに無関係であるなら独立であるという。これに対して物体が互いに関連し合っているときは拘束状態にある。物体の運動は位置と速度が決れば完全にその運動状態が決まるから、これらに対して拘束条件が付与される。位置を拘束するのがホロノミック拘束、速度を(等式関係で)拘束するのがシンプルノンホロノミック拘束である。本書ではホロノミック拘束を配位拘束または幾何拘束、シンプルノンホロノミック拘束を運動拘束と呼んでいる。

この分野において、用語はまだ統一されていない。Haugは[1]ホロノミック拘束をkinematic constraits（運動学的拘束）、Kaneは[2] これを配位拘束(configuration constraints)と呼んでいる。一方、 Kaneはシンプルノンホロノミック拘束を運動拘束(motion costraints)と呼んでいる。これらの用語は日本語訳にするとしばしば紛らわしので、本書では表3.1のように約束している。

表3.1　ホロノミック拘束とノンホロノミック拘束の用語の約束

ホロノミック拘束	・幾何拘束とも言う ・位置の拘束式が与えられる ・位置的自由度が決る ・拘束式の数; m_c ・独立な位置変数の数; p_c
シンプルノンホロノミック拘束	・運動拘束とも言う ・速度の拘束式が与えられる ・運動的自由度が決まる ・拘束式の数; m_v ・独立な速度変数の数; p_v

[補足講義3.1_1] 物理座標と一般化座標

座標と一般化座標(C. Lanczos*) について簡単に補足しておく。

ベクトル力学は、座標についての抽象的な概念を持ち合わせていない。運動を扱う複雑な問題では、ベクトルを用いる幾何学的な方法では限界がある。これに代わって抽象的で解析的な方法、すなわち解析力学が導入された。これにより物理的な問題を数学的な関係に置き換えられて、解かれるようになった。座標はその時に最も重要な役割を演じる。Descartesの座標の概念とその一般化がそれにあたる。

N 個の拘束のない自由な質点系を考えてみよう。すでに本文で述べたように質点の位置は直交座標系で

$$x_i\,, y_i\; z_i \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

により記述される。$x_i\,, y_i\; z_i$ が時間 t の関数として与えられれば運動の問題は解けたことになる。

同じ問題を、座標 $x_i\,, y_i\; z_i$ を

$$q_1, q_2, \cdots, q_{3N}$$

で表し、$q_k\ \ (k=1,2,\cdots,3N)$ を時間の関数で表すというように解くこともできる。その方法の一例として本文では[例題3.1]を学んだ。そこでは質点1と質点2の位置を

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\theta = q_1\cos q_2, \quad y_1 = r\sin\theta = q_1\sin q_2, \quad z_1 = 0 \\ &x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = r - L = q_1 - L \end{aligned} \tag{3.7}$$

と表した(なお、本文では $z_1=0,\ x_2=0,\ y_2=0$ については記述を省略している)。ここでの特徴は円筒座標を用いて半径座標 r 、角度座標 θ および鉛直座標 z を一般化座標として用いていることである。すなわち式(3.7)は直交座標と円筒座標の変換関係にある。このような変換は自由に行えるもので、物理座標 $x_i\,, y_i\; z_i$ で表わす代わりにいつでも都合の良い座標(一般化座標)に変換して問題を解くことができる。

たとえば、一つの剛体の運動は重心の位置と姿勢角により一義的に表すことができるので位置を表わす物理座標 x, y, z と姿勢座標 $\theta_x\,, \theta_y\; \theta_z$ を用いることが多い。この場合には一般化座標 $q_k\ \ (k=1,2,\cdots,6)$ として

$$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z,\ q_4 = \theta_x,\ q_5 = \theta_y,\ q_6 = \theta_i$$

とする。なお姿勢を表わす座標としてはオイラー角やオイラーパラメータなどいくつかの種類がある。オイラー角とオイラーパラメータについてはあとで学ぶ。

* C. Lanczos, 解析力学と変分原理、高橋康監訳・一柳正和訳、日刊工業新聞社、1992.