もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

このSL(short lecture)では，ベクトルとマトリックスの微分を学ぶ。ベクトルを引数とするスカラー関数$a=a(\mathbf{q})=a(q_1 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_k)$をベクトル$\mathbf{q}$で偏微分する方法，ベクトル関数$\mathbf{C}=\mathbf{C}(\mathbf{q})=[C_1(\mathbf{q}) \quad C_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad C_n(\mathbf{q})]^T$をベクトル$\mathbf{q}$で偏微分する方法学ぶ。これはこれらの関数のある点$\mathbf{q}=\mathbf{q}^*$における微分係数を求めることであり，その点回りで線形化する作業の時に必要となる。また，関数曲面に接する方向とそれに直交する方向を見つけなければならないような場合にも必要となる。　2021.01.28　清水

2.7 ベクトルとマトリックスの微分

代数ベクトル$\mathbf{a}$の要素が時間 tの関数であるベクトルは$\mathbf{a}(t)=[a_1(t) \quad a_2(t) \quad \cdots \quad a_m(t)]^T$と書かれる。ここで$m$はベクトルのサイズである。$\mathbf{a}(t)$の$t$に関する微分は

$$\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{a}=\left[\frac{d}{dt}a_1 \quad \frac{d}{dt}a_2 \quad \cdots \quad \frac{d}{dt}a_m\right]^T=[\dot{a}_1 \quad \dot{a}_2 \quad \cdots \quad \dot{a}_m]^T \tag{2.7.1}$$

で定義される。tが時間であることを強調して微分に$(\bullet)$を用いる。

マトリックス$\mathbf{B}$の要素がtの関数であるマトリックスは$\mathbf{B}(t)=[b_{ij}(t)]$と書かれる。$\mathbf{B}(t)$の tに関する微分は

$$\dot{\mathbf{B}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{B}=\left[\frac{d}{dt}b_{ij}\right]=[\dot{b}_{ij}] \tag{2.7.2}$$

で定義される。

スカラーaがサイズkのベクトル$\mathbf{q}=[q_1 \quad \cdots \quad q_k]^T$の関数であるとすると

$$a=a(\mathbf{q})=a(q_1 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_k) \tag{2.7.3}$$

このときaの$\mathbf{q}$に関する偏微分は次のように表される。

$$a_{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}}=\left[\frac{\partial a}{\partial q_1} \quad \frac{\partial a}{\partial q_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial a}{\partial q_k}\right] \equiv \left[\frac{\partial a}{\partial q_j}\right]_{1\times k} \tag{2.7.4}$$

この $a_{\mathbf{q}}$ は行マトリックスである。

スカラー a がベクトル $\mathbf{q}(t)=\left[q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_k(t)\right]^T$ と t の関数である場合には $a=a(\mathbf{q},t)$ と書かれ，a の t に関する微分は

$$\dot{a}=\frac{da}{dt}=\frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}}\frac{d\mathbf{q}}{dt}+\frac{\partial a}{\partial t}=a_{\mathbf{q}}\,\mathbf{q}_t+a_t \tag{2.7.5}$$

となる。ただし

$$\mathbf{q}_t\equiv\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\left[\frac{dq_j}{dt}\right]_{k\times 1} \quad , \quad a_t=\frac{\partial a}{\partial t} \tag{2.7.6}$$

ベクトル $\mathbf{C}$ がベクトル $\mathbf{q}=\left[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k\right]^T$ の関数である場合，すなわち

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}(\mathbf{q})=\left[C_1(\mathbf{q}) \quad C_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad C_n(\mathbf{q})\right]^T \tag{2.7.7}$$

のときは，$\mathbf{C}$ の $\mathbf{q}$ に関する偏微分は

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}}\equiv\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}}\equiv\left[\frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{q}} \quad \cdots \quad \frac{\partial C_n}{\partial \mathbf{q}}\right]^T\equiv\left[\frac{\partial C_i}{\partial q_j}\right]_{n\times k} \tag{2.7.8}$$

で定義される。ここで $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ は $(n\times k)$ のマトリックスである。このマトリックスは，しばしばヤコビアンマトリックスと呼ばれる。

[例題2.7.1]　物理座標 $\mathbf{r}=[x_1 \;\; y_1 \;\; z_2]^T$ と一般化座標 $\mathbf{q}=[r \;\; \theta]^T=[q_1 \;\; q_2]^T$ の関係が

$$\begin{aligned} x_1&=r\cos\theta=q_1\cos q_2\\ y_1&=r\sin\theta=q_1\sin q_2\\ z_2&=r-L=q_1-L \end{aligned} \tag{a}$$

と表されるとする。このとき，ヤコビアンマトリックス $\mathbf{G}\equiv\partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{q}$ を求めてみよう。ヤコビアンマトリックスを計算すると

$$\mathbf{G}\equiv\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}=\begin{bmatrix}\cos q_2 & -q_1\sin q_2\\ \sin q_2 & q_1\cos q_2\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{b}$$

のようになる。

[公式2.7.1] その他のマトリックスやベクトルの微分の公式

マトリックス $\mathbf{A}$ はベクトル $\mathbf{q}$ の関数ではなく一定であり，ベクトル $\mathbf{f}$ だけが $\mathbf{q}$ の関数の場合，次式が成り立つ。

- $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{A}^T \mathbf{f}\right) = \mathbf{A}^T \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$
- $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{A}\mathbf{q}) = \mathbf{A}$
- $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{f}^T \mathbf{A}\mathbf{q}\right) = \mathbf{q}^T \mathbf{A}^T \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}^T \mathbf{A}$
- $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{q}^T \mathbf{q}\right) = 2\mathbf{q}^T$

$\mathbf{A}$ を $(m \times n)$ の定数マトリックス，$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ をそれぞれ m 次と n 次のベクトルとするとき

- $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{p}^T \mathbf{A}\mathbf{q}\right) = \mathbf{q}^T \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}$
- $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{q}^T \mathbf{A}\mathbf{p}\right) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left[g_1(\mathbf{q}), \cdots, g_m(\mathbf{q})\right]^T$，$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \left[h_1(\mathbf{q}), \cdots, h_m(\mathbf{q})\right]^T$ に対して

  $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\mathbf{g}^T \mathbf{h}\right] = \left(\mathbf{g}^T \mathbf{h}\right)_{\mathbf{q}} = \mathbf{h}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}$$

- $\mathbf{C}(\mathbf{g}) = \left[C_1(\mathbf{g}), \cdots, C_n(\mathbf{g})\right]^T$，$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left[g_1(\mathbf{q}), \cdots, g_m(\mathbf{q})\right]^T$，$\mathbf{q} = \left[q_1, \cdots, q_k\right]^T$ に対して

  $$\mathbf{C}_{\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial C_i\left(g(\mathbf{q})\right)}{\partial q_j}\right]_{n \times k} = \left[\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial C_i}{\partial g_l}\frac{\partial g_l}{\partial q_j}\right)\right]_{n \times k} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{g}}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}$$

[補足講義2.3_1]　ヤコビアンマトリックスの具体的な計算

[例題2.7.1]を再度調べてみよう。物理座標 $\mathbf{r}=[x_1\ \ y_1\ \ z_2]^T$ と一般化座標 $\mathbf{q}=[r\ \ \theta]^T=[q_1\ \ q_2]^T$ の関係が

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta = q_1\cos q_2 \\
y_1 &= r\sin\theta = q_1\sin q_2 \\
z_2 &= r - L = q_1 - L
\end{aligned}
\tag{a}
$$

と表されるとする。ヤコビアンマトリックスの計算はその定義式

$$
\mathbf{G} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -q_1\sin q_2 \\ \sin q_2 & q_1\cos q_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\tag{b}
$$

より行われる。ヤコビアンマトリックスの $(1,1)$ 要素は式(a)の第一式を q_1 つまり r で偏微分した式 $\partial x_1/\partial q_1 = \partial(q_1\cos q_2)/\partial q_1 = \cos q_2$ の値である。$(1,2)$ 要素は式(a)の第一式を q_2 つまり θ で偏微分した式 $\partial x_1/\partial q_2 = \partial(q_1\cos q_2)/\partial q_2 = -q_1\sin q_2$ の値である。以下同様に $(2,1)$，$(2,2)$ 要素は $\partial y_1/\partial q_1$，$\partial y_1/\partial q_2$ を計算し、$(3,1)$，$(3,2)$ 要素は $\partial z_2/\partial q_1$，$\partial z_2/\partial q_2$ を計算する。その結果，式(b)の最後の式を得る。この最後の式は，ヤコビアンマトリックス $\mathbf{G}\equiv\partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{q}$ の具体的な配列表示である。実際の数値計算では，この配列要素が必要となる。

[あとがき2.1_1]　マルチボディダイナミクスを学ぶ上で，微分計算は不可欠である。とくにヤコビアンマトリックスを求めることは, 拘束のあるマルチボディシステムでは不可避である。拘束式が m 個ある場合には，これに関連するラグランジュの未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ も m 個あり, これを $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ と書くとすると, 拘束力が $\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}$ と書ける。これは拘束のあるマルチボディシステムのところで学ぶ。