もっと知りたい方は
nobushim@motionlabo.comまで

数学の基礎の学習の始めとして，基準枠と座標，ベクトル，マトリックスを学ぶ。ベクトルには幾何ベクトルと代数ベクトルがある。枠(frame)の概念は，マルチボディダイナミクス(MBD)においてきわめて重要である。ベクトルとマトリックスは多くの人がすでに学んでいるが，これも実際的にたいへん重要である。ぜひ，本講義でマスターしていただきたい。 2020.12.16 清水

2. 数学の基礎

物体の運動を観察し記述するには，基準枠と座標が必要である。物体の運動は，とられる基準枠には依存しないが，ひとたびこの枠を導入して運動を記述するとその式はこの枠と座標に依存する。本章では基準枠と座標の定義およびその性質と数学的な基礎について学ぶ。

2.1 基準枠と座標

3次元空間を考える。物体はこの空間内で運動しているとする。この空間内に図2.1.1のような直交基準枠(デカルト枠)を考える。この基準枠(単に枠ということがある)は，原点Oの位置と三つの方向を持つ直交軸により決められる。各軸に長さの目盛りをつける。これを座標と呼ぶ。各軸x, y, zの正方向に向く長さ1のベクトルを**基底ベクトル**(base vector)と呼ぶ。この基底ベクトルを$\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$とし，これをまとめて記号的に$\mathbf{e}$と書く(2.4節参照)。この枠を枠$\{O, \mathbf{e}\}$，枠$O-xyz$または枠$O$などと書く。直交軸として図2.1.1のように，$x$軸を$z$軸まわりに(小さいほうの角度で)$y$軸方向に向かって回転させたときに，右ネジの進む方向にz軸の正方向をとる右手系を約束する。この本では一貫して右手系を用いる。空間内に枠$\{O, \mathbf{e}\}$を決めると図2.1.1に示すように，任意の点Pは直交座標p_x, p_y, p_zにより与えられる。

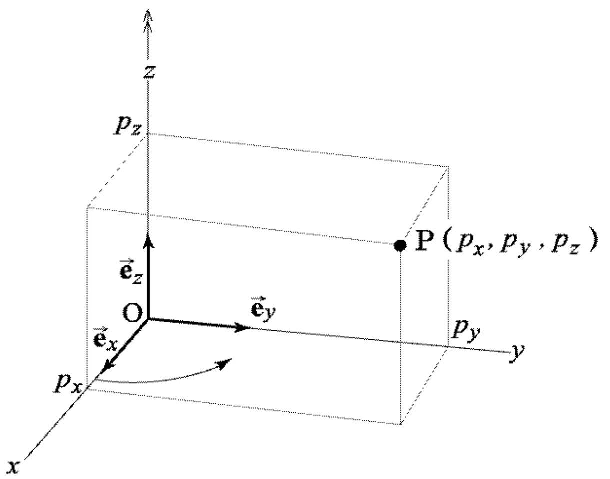

図2. 1. 1　　直交基準枠と点 P の直交座標系
$\{p_x, p_y, p_z\}$

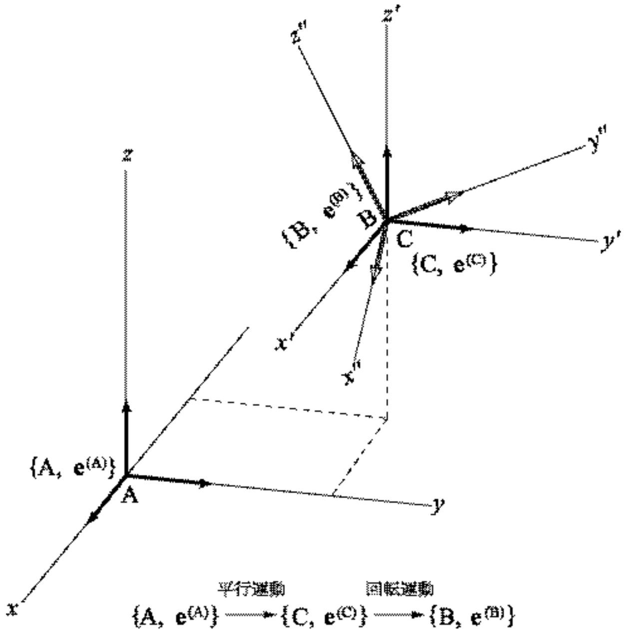

図2.1.2　　枠 A に対する枠 B の運動

二つの基準枠を区別するには枠 $\{A, \mathbf{e}^{(A)}\}$，枠 $\{B, \mathbf{e}^{(B)}\}$ などと書く。枠 A に対する枠 B の一般的な運動は図2.1.2の平行移動 ； $\{A, \mathbf{e}^{(A)}\} \to \{C, \mathbf{e}^{(C)}\},\ (\mathbf{e}^{(A)} = \mathbf{e}^{(C)})$ と回転運動 ； $\{C, \mathbf{e}^{(C)}\} \to \{B, \mathbf{e}^{(B)}\},\ (C = B)$ の合成で表わされる。

One point　マルチボディダイナミクスにおける文字と記号について

マルチボディダイナミクスを学ぶ上で，特に初学者を悩ますものの一つに文字や記号の煩雑さがある。筆者がこの本を手がける際にも一番頭を悩ませたのが文字と記号の使用法であった。マルチボディダイナミクスの本を調べてみると，込み入った文字や記号がいたるところで使われ，同じ意味を表すのに異なる記号や文字が使われていることの多いのに驚く。

動力学の記述において最も基本的な量であるベクトルについてみてみよう。多くの書物で幾何ベクトルに対して$\vec{a}$，$\mathbf{a}$などが用いられている。一方，代数ベクトル(列マトリックス)に対して$\mathbf{a}$，aなどが用いられている。このように同一文字が異なる意味に使用されている。

本書では幾何ベクトルに$\vec{\mathbf{a}}$を代数ベクトルに$\mathbf{a}$を割り当てている。どちらもゴシック体であり，幾何ベクトルには文字の上に→をつけ代数ベクトルと区別する。その他の記号についても書物によってまちまちであり，注意することが大切である。本講義で用いる文字と記号は，適宜必要な場所で「文字と記号の約束」として示すことにする。

2.2 幾何ベクトルと代数ベクトル

2.2.1 幾何ベクトル

図2.2.1の**幾何ベクトル**(geometric vector)$\vec{\mathbf{a}}$は，点Pから始まり点Qで終わる有向線分により定義される。ベクトルの大きさはaまたは$|\vec{\mathbf{a}}|$で表わされる。ベクトル$\vec{\mathbf{a}}$のα倍のベクトルは大きさがαaで $\alpha > 0$なら$\vec{\mathbf{a}}$と同方向，$\alpha < 0$なら反対方向を向くベクトルである。2つのベクトル$\vec{\mathbf{a}}$と$\vec{\mathbf{b}}$の和$\vec{\mathbf{c}}$は

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \tag{2.2.1}$$

と書かれ，図2.2.2のように$\vec{\mathbf{a}}$と$\vec{\mathbf{b}}$の作る平行四辺形の対角ベクトルとして定義される。これらの図には枠$O-xyz$が描かれているが幾何ベクトルは枠には無

関係である。

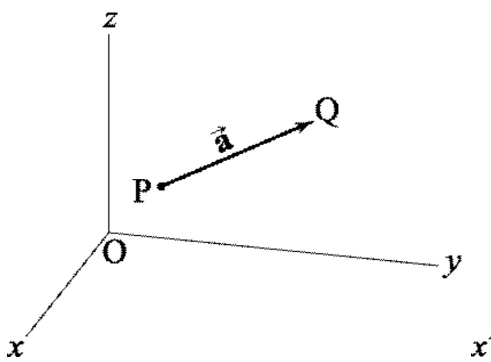

図2.2.1　点 P から点 Q に向かうベクトル

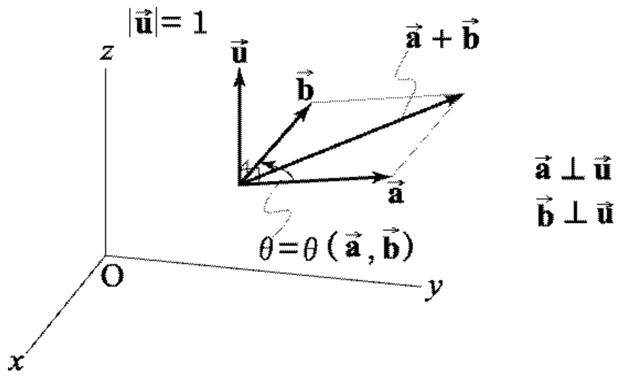

図2.2.2　二つのベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ と $\vec{\mathbf{b}}$ およびそれに直交するベクトル $\vec{\mathbf{u}}$

ベクトルには二種類の積が定義される。

(1) 内積

内積はドット $(\bullet)$ で書かれ

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=ab\cos\theta \tag{2.2.2}$$

により定義される。ここで $\theta=\theta\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\right)$ は図2.2.2に示すように $\vec{\mathbf{a}}$ と $\vec{\mathbf{b}}$ のなす角度で，小さい方の角度をとる。この内積には交換則

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}} \tag{2.2.3}$$

が成り立つ。

(2) 外積

外積はクロス $(\times)$ で書かれ

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=ab\sin\theta\,\vec{\mathbf{u}} \tag{2.2.4}$$

により定義される。ここで $\vec{\mathbf{u}}$ は図2.2.2に示すように，$\vec{\mathbf{a}}$ と $\vec{\mathbf{b}}$ の作る平面に垂直な単位ベクトルで，$\vec{\mathbf{a}}$ から $\vec{\mathbf{b}}$ の方向へ右ねじを回転させたとき進む方向を正と

する(小さい方の角度をとる)。この外積には

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}} \tag{2.2.5}$$

という性質がある。

2.2.2 代数ベクトル

図2.2.3に示すように，任意の幾何ベクトル$\vec{\mathbf{a}}$は直交基準枠のx, y, z軸の基底ベクトル$\vec{\mathbf{e}}_x$，$\vec{\mathbf{e}}_y$，$\vec{\mathbf{e}}_z$の成分表示で

$$\vec{\mathbf{a}}=a_x\vec{\mathbf{e}}_x+a_y\vec{\mathbf{e}}_y+a_z\vec{\mathbf{e}}_z=\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x\\ \vec{\mathbf{e}}_y\\ \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

と書ける。a_x, a_y, a_zは$\vec{\mathbf{a}}$のx, y, zの座標である。この成分をまとめて

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}^T \tag{2.2.7}$$

と書き，これを代数ベクトル(algebraic vector) $\mathbf{a}$と呼ぶことにする。このベクトルは(3×1)の列マトリックスである。したがって代数ベクトルにはしたがってマトリックスの演算が成り立つ。代数ベクトルには幾何ベクトルで成立する公式はすべて成立する。例えば$\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{c}}$に対して

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c} \tag{2.2.8}$$

内積$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}$に対して

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\mathbf{b}^T\mathbf{a} \tag{2.2.9}$$

となる。

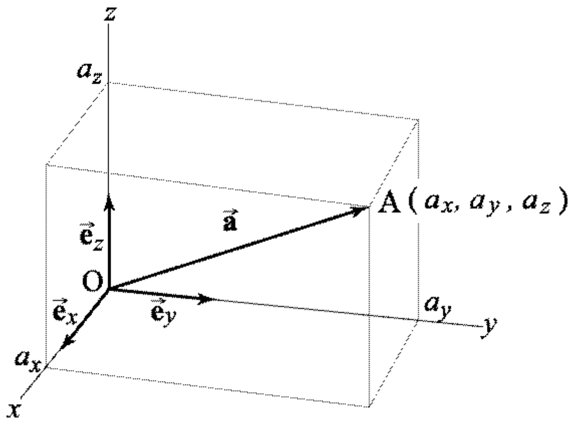

図2.2.3　直交基準枠とベクトル $\vec{\mathbf{a}}$ の成分

2.3 マトリックス

マトリックスは数を配列したものである。$\mathbf{A}$，$\mathbf{v}$ のようにゴシック体で表す。$(m \times n)$次元のマトリックス $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right] \tag{2.3.1}$$

のように書く。a_{ij} は i 行，j 列に位置する要素[(i, j) 要素]である。$m = n$ のマトリックス $\mathbf{A}$ は正方マトリックスといわれる。(i, j) 要素が a_{ji} であるマトリックスは $\mathbf{A}^T$ と書かれ $\mathbf{A}$ の**転置マトリックス**(transpose of matrix $\mathbf{A}$)といわれる。

対角要素がすべて非零で非対角要素がすべて 0 の正方マトリックスは，**対角マトリックス**(diagonal matrix)と呼ばれる。特に，対角がすべて1でその他の要素がすべて0のマトリックスは恒等マトリックス(identity matrix)と呼ばれ

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(1\ 1\ 1 \cdots 1) \tag{2.3.2}$$

と書かれる(単位マトリックスとも呼ばれる)。特にサイズを表わしたい時は$\mathbf{I}_n$(要素数がnの単位マトリックス)などと添え字を付す。

正方マトリックス$\mathbf{A}$に対して

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{2.3.3}$$

となるマトリックス$\mathbf{B}$を$\mathbf{A}^{-1}$と書いて$\mathbf{A}$の**逆マトリックス**(inverse matrix)という。$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$および$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$を $\mathbf{A}^{-T}$と書く。

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \tag{2.3.4}$$

となる正方マトリックス$\mathbf{A}$は**ひずみ対称マトリックス**(skew symmetric matrix)といわれる。このような性質を有する(3×3)のマトリックスは

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.5}$$

の形に書ける。

正方マトリックス$\mathbf{A}$のトレース$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\right)$はマトリックスの対角要素をすべて加え合わせたものと定義される。すなわち，式(2.3.1)で$m = n$のときの正方マトリックス$\mathbf{A}$のトレースは

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\right) = a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn} \tag{2.3.6}$$

である。

$\left(m \times 1\right)$次元の列マトリックス$\mathbf{v}$を

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \left[v_i\right] \tag{2.3.7}$$

のように書く。$\mathbf{v}$の転置マトリックスは行マトリックスとなり$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$と書かれる。

[補足講義2.1_1]　マとリックスの積

二つのマトリックス **A** と **B** のサイズがそれぞれ $(m\times n)$ と $(p\times q)$ であるとすると，**AB** が存在するためには $n=p$ が，**BA** が存在するためには $q=m$ が成立していなければならない。**A** と **B** がそれぞれ正方マトリックスで **AB** が存在すれば **BA** も存在する。

二つのマトリックスの積 **AB** を **A** と **B** のサイズが3の場合について計算してみよう。**A** と **B** を

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

と書くと，**AB** は

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

となる。一方、**BA** は

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+b_{13}a_{32} & b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23}+b_{13}a_{33} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+b_{23}a_{32} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}+b_{23}a_{33} \\ b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21}+b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22}+b_{33}a_{32} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23}+b_{33}a_{33} \end{bmatrix}$$

上の例を見ると分かるように $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ であることが確認できる。マトリックスのサイズが一般の m の場合にも

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

が成り立つ。すなわち2つのマトリックスの積は掛ける順序に依存する。具体的な例で確認してみよう。例えば，**A** と **B** を適当な (2×2) のマトリックス

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

として，積積 **AB** と **BA** を計算すると

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 0 & 1\times 2+2\times 1 \\ 4\times 1+3\times 0 & 4\times 2+3\times 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 4 & 1\times 2+2\times 3 \\ 0\times 1+1\times 4 & 0\times 2+1\times 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。したがって $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ が確認できた。このようにマトリックスの積において，掛ける順序は大切である。

[あとがき2.1_1]　マルチボディダイナミクスを学ぶ上で，ベクトルとマトリックスは欠かせない基礎的で重要な知識である。運動方程式を定式化する作業では，これらは実質的な意味をもつ。ベクトルとマトリックスを用いた運動方程式の立て方についてはこれから，具体的に学ぶ。