粘弾性材料の線形および非線形応答の分数微分モデルと工学への応用

福長正考 [1], 清水信行 [2]
[1] 日本大学工学部（非常勤講師）, [2](株) モーションラボ
e-mail：fukunaga@apple.ifnet.or.jp

1 概要

現在、ゴムやゲルが制震や衝撃緩和材料として多くの場面で用いられている。これらの材料は粘性と弾性的性質を併せ持っている。これらの材料の性能がより発揮されるには材料の力学的特性を理解することが重要である。これら粘弾性材料の線形および非線形応答を説明する数学的手段の有力な手段の一つが分数微分（または分数階微分）である。粘弾性材料の周波数応答や減衰問題は分数微分モデルによってよく説明されることが知られている。また、衝撃による大変形問題に対しても分数微分モデルは有力な手段と考えられる。

2 粘弾性材料の分数微分解釈

分数微積分（または分数階微積分）は現在多くの分野で応用されている。ここではその一例として粘弾性材料への応用をとりあげる。粘弾性材料と言われるもので粘性的性質と弾性的性質をあわせ持っている。それらの中には、Newton 粘性によって表される素子とバネによって表される素子との簡単な組み合わせによって表されることのできない材料がある。ある種の粘弾性材料は動的ずり弾性率が周波数のベキ乗で表される [1, 2]。複素弾性率を G^*、印加周波数を ω とすると、

$$G^* \propto \omega^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

このような周波数特性の数学的に表現手段として分数微分を用いることができることが知られている [1]。Newton 粘性の応力は変位速度に比例する。また弾性は変位自体に比例する。これらはそれぞれ、数学的には変位の一階導関数と零階導関数によって表される。これらの量を Fourier 変換すると複素弾性率の周波数依存性は (1) 式ではそれぞれ $\alpha = 1$ と $\alpha = 0$ となる。この点から (1) 式で表される力学量は 0 階と 1 階の中間の微分階数で表される量であると言える。以下、粘弾性体の力学的特性を分数微分によって解釈していく。

分数微分の定義は多くあるが、ここでは積分を用いた定義を二つあげる。一つは、Riemann-Liouville 微分で下式によって定義される。$0 < \alpha < 1$ の場合、

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \tag{2}$$

ここで、$\Gamma(s)$ はガンマ関数で $s > 0$ の場合下式で定義される。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \tag{3}$$

もう一つは Caputo 微分と言われるもので下式で定義される。$0 < \alpha < 1$ の場合、

$${}^*D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f^{(1)}(s) ds \tag{4}$$

Riemann-Liouville 微分は $f(t)$ を $1-\alpha$ 階積分した後微分し、Caputo 微分では $f(t)$ を微分した後 $1-\alpha$ 階積分し、結果 α 階微分したことになる。一般に $p(>0)$ 階積分は下式によって定義される。

$$I_a^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(1+p)} \int_a^t (t-s)^{p-1} f(s) ds \tag{5}$$

この式が分数階積分を表すことは、p が自然数の場合 p 階逐次積分を表すことから理解されよう。Riemann-Liouville 微分と Caputo 微分の間には下式の関係がある。

$$D_a^\alpha f(t) = {}^*D_a^\alpha f(t) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \tag{6}$$

積分の下限（分数微分の下端）を $a \to -\infty$ とし、Fourier 変換を行うと、Riemann-Liouville 微分、Caputo 微分どちらの場合も下式で表される。

$$\mathcal{F}[D_a^\alpha f(t);\omega] = \mathcal{F}[{}^*D_a^\alpha f(t);\omega] = (i\omega)^\alpha \mathcal{F}[f(t);\omega] \tag{7}$$

となる。この Fourier 変換の性質によって、(1) 式で表される周波数特性をもつ動的ずり弾性が

分数微分によって解釈可能となる。すなわち、応力を σ、ひずみを ϵ とすると、(1) 式から導かれる応力ーひずみ関係は下式で表される。

$$\sigma = \mu_v D_a^\alpha \epsilon \text{ または } \sigma = \mu_v {}^* D_a^\alpha \epsilon \qquad (8)$$

ここで、物質定数 μ_v の次元は Pa s^α である。

3　有限変形のモデル

粘弾性体の変形が大きい場合、(8) 式のような線形応答ではなく非線形問題を取り扱う必要があるが、これはまだ未解決の課題である。分数微分応力ーひずみ関係の物理的意味は Caputo 微分を用いた定式化を見るとわかりやすいであろう。(8) の右の式を (4) の積分形式で見ると、これは Boltzmann の重ね合わせの原理を表している。粘弾性物質の問題では、積分される量であるひずみ速度 $f^{(1)}(\tau) = \dot{\epsilon}$ の解釈の違いによってこれまでに多くのモデルが提案されている [3, 4]。ここでは有限変形問題に対する私たちの取り組みを紹介する。

粘弾性体の力学的性質は構成要素であるポリマーの熱運動に起因する弾性的性質と、溶媒とポリマー間の摩擦に起因すると考えられている。Rouse [5] はこの仮定のもと希薄溶液に対して周波数応答を解析しある周波数領域で (1) 式を得た。私たちはゲルなどの固体粘弾性体も希薄溶液と同様の事が生じているとして非線形分数微分モデルを提案した [6, 7, 2]。

4　分数微分モデルの性質とモデルの応用

従来、粘弾性材料の力学的性質はマクスウェルモデル、フォークトモデルなどバネとダッシュポットを複数個組み合わせて説明されてきた。これらのモデルと分数微分モデルとを、クリープ問題、応力緩和、振動問題、衝撃応答問題を通じて比較する。線形分数微分モデルは粘弾性材料の振動問題や減衰問題をよく説明する事が知られている。非線形モデルについての事例は少ないが、私たちは衝撃応答の実験データを再現する事を示した [2]。

振動を低減するための減衰材料、衝撃を緩和する衝撃材料として種々の高分子材料が利用されている。主に機械材料の分野、建築構造の耐震工学分野、大型宇宙構造の振動分野では材料の減衰性能と衝撃吸収性能は重要である。

これらの材料の特徴は物理特性に温度依存性と周波数依存性があることである。さらに大きな変形を伴う場合にはひずみ依存性も重要な材料特性の一つである。これらの性質を知って、適切な解析法を適用して初めて製品開発が有効なものとなる。

参考文献

[1] R. L. Bagley and P. J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, Vol. 27 (1983), 201–210.

[2] M. Fukunaga and N. Shimizu. Comparison of fractional derivative models for finite deformation with experiments of impulse response. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 20 (2014),1033–1041.

[3] A. D. Drozdov. Fractional differential models in finite viscoelasticity. *Acta Mechanica*, Vol. 124 (1997),155–180.

[4] A. D. Freed and K. Diethelm. Fractional calculus in bio mechanics: a 3D viscoelastic model using regularized fractional derivative kernels with application to the human calcaneal fat pad. *Biomechan. Model Mechanobiol.*, Vol. 5 (2006), 203–215.

[5] Jr P. E. Rouse. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. *Journ. Chem. Phys.*, Vol. 21(1953),1272–1280.

[6] M. Fukunaga and N. Shimizu. Nonlinear fractional derivative models of viscoelastic impact dynamics based on viscoelasticity and generalized maxwell law. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 6 (2011), 021005.

[7] M. Fukunaga and N. Shimizu. Three-dimensional fractional derivative models for finite deformation. In *ASME 2011 IDETC/CIE 2011, August 28 - 31, 2011, Washington, DC, IDETC2011/47552*. 2011.